Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K.-H. Neeb
Dipl.-Math. Rafael Dahmen,
Dipl.-Math. Stefan Wagner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2007
28.6.2007

11. Tutorium zur „Analysis I für M, LaG und Ph“

Aufgaben und Lösungen

Aufgabe T33 (nicht stetige Funktionen)

Skizziere die Graphen der folgenden Funktionen und markiere ihre Unstetigkeitsstellen (ausnahmsweise alles ohne Beweis):

(a) $g_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \geq 5 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

(b) $g_b : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

(c) $g_c := g_a + g_b$

(d) $g_d : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto [x] := \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$

(e) $g_e : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x + [x]$

(f) $g_f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0 \\ \frac{x}{|x|} & \text{sonst} \end{cases}$

(g) $g_g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } (\exists k \in \mathbb{N}) x = -\frac{1}{k} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

(h) $g_h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x - [x]$

Lösung: Unstetigkeitsstellen: bei der (a) die 5, bei der (b) die 2, bei der (c) die 2 und die 5, bei der (d), bei der (e) und bei der (h) sind es alle $k \in \mathbb{Z}$.
Bei der (f) ist es nur die 0. Bei (g) sind es alle Zahlen der Form $\frac{1}{n}$ und die 0.

Wir erinnern uns an die Definition von einseitigen Grenzwerten (Definition IV.1.10): Sei $p \in \mathbb{R}$. Wir betrachten alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n < p$, die gegen p konvergieren. Für jede dieser Folgen können wir die entsprechende ,,Bildfolge” $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ betrachten. Falls alle diese Bildfolgen konvergieren und auch alle den gleichen Grenzwert haben, dann nennen wir dies den linksseitigen Grenzwert und schreiben diese Zahl als $\lim_{x\to p^-} f(x)$.

Analog schreiben wir $\lim_{x\to p^+} f(x)$ für den gemeinsamen Grenzwert (falls er existiert) aller Folgen $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge ist, die größer als p ist und gegen p konvergiert.

Wir wissen: f ist genau dann stetig in p, wenn $\lim_{x\to p^-} f(x) = f(p) = \lim_{x\to p^+} f(x)$ gilt.

Aufgabe T34 (Einseitige Grenzwerte an Beispielen)

(a) Suche dir ein paar Beispiele aus Aufgabe (T33) aus. Bestimme anhand der Skizzen (ohne Beweis) die links- und rechtsseitigen Grenzwerte dieser Funktionen an ihren Unstetigkeitsstellen.

(b) Es gibt genau eine Funktion aus Aufgabe (T33), bei der ein einseitiger Grenzwert nicht existiert. Finde diese Funktion, die entsprechende Stelle und begründe formal, warum dieser einseitige Grenzwert nicht existiert.

Lösung:

(a) Die links- und rechtsseitigen Grenzwerte lauten:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 5^-} g_a &= 0\\
\lim_{x\to 5^+} g_a &= 1\\
\lim_{x\to 2^-} g_b &= 0\\
\lim_{x\to 2^+} g_b &= 1\\
\lim_{x\to 2^-} g_c &= 0\\
\lim_{x\to 2^+} g_c &= 1\\
\lim_{x\to 5^-} g_c &= 1\\
\lim_{x\to 5^+} g_c &= 2\\
(\forall k\in\mathbb{Z})\lim_{x\to k^-} g_d &= k-1\\
(\forall k\in\mathbb{Z})\lim_{x\to k^+} g_d &= k\\
(\forall k\in\mathbb{Z})\lim_{x\to k^-} g_e &= 2k-1\\
(\forall k\in\mathbb{Z})\lim_{x\to k^+} g_e &= 2k\\
\lim_{x\to 0^-} g_f &= -1\\
\lim_{x\to 0^+} g_f &= 1\\
(\forall k\in\mathbb{N})\lim_{x\to -\frac{1}{k}^-} g_g &= 0\\
(\forall k\in\mathbb{N})\lim_{x\to -\frac{1}{k}^+} g_g &= 0\\
\lim_{x\to 0^-} g_g & \quad \text{existiert nicht. (siehe Aufgabenteil (b)}\\
\lim_{x\to 0^+} g_g &= 0\\
(\forall k\in\mathbb{Z})\lim_{x\to k^-} g_h &= 1\\
(\forall k\in\mathbb{Z})\lim_{x\to k^+} g_h &= 0
\end{aligned}$$

(b) Behauptung: Der Grenzwert $\lim_{x\to 0^-} g_g$ existiert nicht.

Wenn der linksseitige Grenzwert existieren würde, dann würden alle Folgen $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n < 0$ und $x_n \to 0$ gegen den selben Grenzwert konvergieren.

Um also zu zeigen, dass der Grenzwert nicht existiert, haben wir also die Möglichkeit, entweder eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n < 0$ und $x_n \to 0$ anzugeben, sodass $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ nicht konvergiert (1.Lösungsmethode) oder zwei Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ anzugeben, bei denen $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ und $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ beide konvergieren, aber unterschiedliche Grenzwerte haben (2.Lösungsmethode).

Wir wählen hier die zweite Variante: Setze also $x_n := -\frac{1}{n}$. Per Konstruktion ist diese Folge immer kleiner als 0 und konvergiert gegen 0. Per Definition von f gilt, dass $(\forall n\in\mathbb{N}) f(x_n) =$

1. Somit ist die Folge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konstant gleich 1 und konvergiert so auch gegen 1.
Setze nun $y_n := -\frac{1}{n+\frac{1}{2}}$. Diese Folge konvergiert ebenfalls von unten gegen 0, aber sich kein einziges Folgenglied $-\frac{1}{n+\frac{1}{2}}$ als $-\frac{1}{k}$ für ein $k \in \mathbb{N}$ schreiben lässt, ist $(f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konstant gleich 0 und konvergiert so auch 0. (Anmerkung: Es funktioniert natürlich auch jede andere Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die von unten gegen 0 konvergiert und die Zahlen $\left\{\frac{1}{k} : k \in \mathbb{N}\right\}$ nicht trifft, z.B. $y_n = -\frac{\sqrt{2}}{n}$.)

Aufgabe T35 (Monton wachsende Funktionen und Folgen)
Gegeben sei eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die monoton wächst, d.h. $(\forall x, y \in \mathbb{R}) x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$. Weiterhin sei $p \in \mathbb{R}$ ein Punkt. Wir wollen zeigen, dass $\lim_{x\to p^-} f(x)$ existiert.

(a) Zeige kurz, dass jede monoton wachsende Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von f auf eine monoton wachsende Folge abgebildet wird.

(b) Gib eine möglichst einfache Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an, die monoton wachsend von unten gegen p konvergiert.

(c) Zeige, dass für den Spezialfall der Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus Teil (b) die Folge $(f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen eine Zahl $L \in \mathbb{R}$ konvergiert mit $L \leq f(p)$.

(d) Sei $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge mit $x_m < p$, die (nicht notwendigerweise monton) gegen p konvergiert. Zeige: $(\forall m \in \mathbb{N})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) y_n > x_m$.

(e) Folgere aus (d), dass die Folge $(f(x_m))_{m\in\mathbb{N}}$ nach oben durch L beschränkt wird.

(f) Zeige nun: $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m_0 \in \mathbb{N})(\forall m \geq m_0) y_n < x_m$.

(g) Folgere, dass die Folge $(f(x_m))_{m\in\mathbb{N}}$ auch gegen L konvergiert.

Damit haben wir gezeigt, dass $\lim_{x\to p^-} f(x) = L$ existiert.

Lösung:

(a) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge in $\mathbb{R}$, d.h.

$$(\forall n \in \mathbb{N}) x_n \leq x_{n+1}.$$

Da f eine monoton wachsende Funktion ist, folgt aus $x_n \leq x_{n+1}$ aber sofort, dass

$$(\forall n \in \mathbb{N}) f(x_n) \leq f(x_{n+1}).$$

Und das sagt gerade, dass die Bildfolge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wächst. Das war zu zeigen.

(b) Setze $y_n := p - \frac{1}{n}$.

(c) Die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend. Nach (a) gilt, dass die Bildfolge $(f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ auch monoton wächst. Die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nach Konstruktion nach oben durch p beschränkt. Aus der Monotonie von f folgt direkt, dass die Bildfolge $(f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben durch $f(p)$ beschränkt ist. Nach dem Satz von der monotonen Konvergenz (Satz III.2.19) konvergiert diese Folge gegen ihr Supremum $L := \sup\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$. Da $f(p)$ eine obere Schranke ist, muss L als kleinste obere Schranke kleiner oder gleich $f(p)$ sein.

(d) Sei $m \in \mathbb{N}$ beliebig.
Wir wissen, dass alle Folgenglieder kleiner als p sind, deswegen gilt: $p - x_m > 0$.
Setze $\varepsilon := p - x_m$. Dann ist $\varepsilon > 0$.
Da die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen p konvergiert, gibt es ein $n_o \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq n_0$ der

Abstand $|p - y_n|$ kleiner als ε ist. Da die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ immer kleiner als p ist, darf man die Betragsstriche weglassen und erhält:

$$\begin{aligned} |p - y_n| &< \varepsilon \\ \Longrightarrow p - y_n &< \varepsilon \\ \Longrightarrow p - y_n &< p - x_m \\ \Longrightarrow -y_n &< -x_m \\ \Longrightarrow y_n &> x_m. \end{aligned}$$

(e) Wir wissen aus (d), dass für gegebenes $m \in \mathbb{N}$ die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ irgendwann größer als x_m wird. Wegen der Monotonie von f gilt dies auch für die Bildfolgen:

$$(\forall m \in \mathbb{N})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) f(y_n) \geq f(x_m).$$

(Man beachte, dass aus dem „$>$"-Zeichen nur noch ein „$\geq$" geworden ist, da f nur monoton wachsend und nicht notwendigerweise streng monoton wachsend ist.) Dies besagt nun aber, das die Folge $(f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ nach endlichen vielen Indizes größer/gleich dem Wert $f(x_m)$ ist. Also wird auch der Grenzwert von $(f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ größer/gleich $f(x_m)$ sein. Wir haben also gezeigt:

$$f(x_m) \leq L = \lim_{n\to\infty} f(y_n)$$

Da dies für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt, heißt dies: Die Folge $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ ist nach oben durch L beschränkt.

(f) Dies funktioniert exakt wie in Aufgabenteil (d):
Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig.
Wir wissen, dass alle Folgenglieder kleiner als p sind, deswegen gilt: $p - y_n > 0$.
Setze $\varepsilon := p - y_n$. Dann ist $\varepsilon > 0$.
Da die Folge $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ gegen p konvergiert, gibt es ein $m_o \in \mathbb{N}$, sodass für alle $m \geq m_0$ der Abstand $|p - x_m|$ kleiner als ε ist. Da die Folge $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ immer kleiner als p ist, darf man die Betragsstriche weglassen und erhält:

$$\begin{aligned} |p - x_m| &< \varepsilon \\ \Longrightarrow p - x_m &< \varepsilon \\ \Longrightarrow p - x_m &< p - y_n \\ \Longrightarrow -x_m &< -y_n \\ \Longrightarrow x_m &> y_n. \end{aligned}$$

(g) Sei $\varepsilon > 0$.
Wir müssen zeigen, dass es ein $m_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit $(\forall m \geq m_0)|L - f(x_m)| < \varepsilon$. Da aber nach Aufgabenteil (e) die Folge $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ nach oben durch L beschränkt wird, darf man die Betragsstriche weglassen, d.h. wir müssen folgendes zeigen:

$$(\exists m_0 \in \mathbb{N})(\forall m \geq m_0) L - f(x_m) < \varepsilon$$

Wir wissen, dass die Folge $(f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen L konvergiert, also gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$(\forall n \geq n_0)|L - f(y_n)| < \varepsilon.$$

Da L das Supremum aller $f(y_n)$ ist, kann man die Betragsstriche weglassen und erhält:

$$(\forall n \geq n_0) L - f(y_n) < \varepsilon$$

oder auch:

$$(\forall n \geq n_0) f(y_n) > L - \varepsilon.$$

Nach Aufgabenteil (f) gibt es nun eine Zahl $m_0 \in \mathbb{N}$, sodass

$$(\forall m \geq m_0) x_m \geq y_{n_0}$$

Wenden wir wieder einmal die monoton wachsende Funktion f auf diese Ungleichung an, so erhalten wir:

$$(\forall m \geq m_0) f(x_m) \geq f(y_{n_0})$$

Wie wir weiter oben aber schon gesehen haben, ist $f(y_{n_0})$ größer als $L - \varepsilon$, somit gilt:

$$(\forall m \geq m_0) f(x_m) > L - \varepsilon$$

oder auch:

$$(\forall m \geq m_0) L - f(x_m) < \varepsilon$$

und das war zu zeigen.

Analog kann man zeigen, dass jede monoton wachsende Funktion auch einen rechtsseitigen Grenzwert besitzt und dass dies alles auch für monoton fallende Funktionen funktioniert.

Aufgabe T36 (Sprungstellen)

(a) Begründe, warum eine monoton wachsende Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an jedem Punkt $p \in \mathbb{R}$ entweder stetig ist oder eine Sprungstelle besitzt. (Eine Sprungstelle ist ein Punkt, an dem links- und rechtsseitiger Grenzwert existieren, aber nicht übereinstimmen.)

(b) Begründe, warum bei einer monoton wachsenden Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aus der *Surjektivität* die *Stetigkeit* folgt.

(c) Begründe, warum eine monoton wachsende Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bei jedem Sprung mindestens eine rationale Zahl überspringt.

(d) Versuche dir ein Argument dafür zu überlegen, dass eine monoton wachsende Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nur abzählbar viele Sprungstellen und damit also nur abzählbar viele Unstetigkeitsstellen besitzt.

(e*) Absolute Bonus-Aufgabe: Bei nicht monotonen Funktionen kann es unter Umständen passieren, dass eine Funktion überabzählbar viele Unstetigkeitsstellen besitzt. Das wohl prominenteste Gegenbeispiel, genannt die *Dirichlet-Funktion*, stellen wir hier vor:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{falls } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Zeige, dass diese Funktion an *gar keiner* Stelle $p \in \mathbb{R}$ stetig ist. Es ist sogar richtig, dass kein einziger einseitiger (linksseitiger oder rechtsseitiger) Grenzwert existiert. Hinweis: Fallunterscheidung: Für $p \in \mathbb{Q}$ setze z.B. $x_n := p + \frac{\sqrt{2}}{n}$; für $p \notin \mathbb{Q}$, verwende z.B. (H24).

Lösung:

(a) Wir haben in der Aufgabe (T35) gezeigt, dass monoton wachsende Funktionen immer einen linksseitigen Grenzwert besitzen. Analog zeigt man, dass bei monoton wachsenden Funktion auch immer ein rechtsseitiger Grenzwert existiert. Weiter gilt für monoton wachsende Funktionen, dass der linksseitige Grenzwert ist immer kleiner/gleich dem Funktionswert ist. Analog zeigt man, dass der rechtsseitige Grenzwert immer größer/gleich dem Funktionswert ist:

$$\lim_{x \to p^-} f(x) \leq f(p) \leq \lim_{x \to p^+}$$

Es gibt also nur zwei Fälle zu betrachten:

1.Fall: links- und rechtsseitger Grenzwert stimmen überein, dass muss wegen der obigen Ungleichung auch der Funktionswert mit den beiden einseitigen Grenzwerten übereinstimmen, es gilt also: $\lim_{x\to p^-} f(x) = f(p) = \lim_{x\to p^+}$. Damit ist f stetig im Punkt p.

2.Fall: links- und rechtsseitger Grenzwert existieren, stimmen aber nicht überein, das ist dann eine Sprungstelle.

(b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monoton wachsende Funktion, die surjektiv ist.
Angenommen, f sei nicht stetig. Dann gilt nach der (a), dass sie eine Sprungstelle besitzt. Es gibt also einen Punkt $p \in \mathbb{R}$ mit

$$\lim_{x\to p^-} f(x) < \lim_{x\to p^+}.$$

Dies bedeutet insbesondere, dass alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x < p$ einen Funktionswert kleiner/gleich $\lim_{x\to p^-} f(x)$ haben. Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x > p$ gilt $f(x) > \lim_{x\to p^+} f(x)$.
Also werden alle reellen Zahlen im offenen Intervall $]\lim_{x\to p^-} f(x), \lim_{x\to p^+}[$ von Zahlen x, die größer oder kleiner als p sind, nicht erreicht. Der einzige Punkt im Definitionsbereich, der in diesen Intervall abgebildet werden könnte, ist der Punkt p. Da das Intervall $]\lim_{x\to p^-} f(x), \lim_{x\to p^+}[$ aber unendlich viele Zahlen enthält und $f(p)$ nur eine einzige Zahl ist, gibt es also sicher reelle Zahlen, die von der Funktion niemals erreicht werden.
Also ist f nicht surjektiv.
Widerspruch zur Annahme.

(c) Wir haben bereits gesehen, dass eine monotone Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an jeder Unstetigkeitsstelle $p \in \mathbb{R}$ das Intervall

$$]\lim_{x\to p^-} f(x), \lim_{x\to p^+}[$$

,,überspringt". In jedem nichtleeren offenen Intervall befindet sich aber nach Folgerung II.2.20 eine rationale Zahl. Also wird sozusagen bei jeder Unstetigkeitsstelle auch mindestens eine raionale Zahl ,,übersprungen".

(d) Sei $M := \{p \in \mathbb{R} : f \text{ ist nicht stetig an der Stelle } p\}$ die Menge der Unstetigkeitsstellen. Wir wollen zeigen, dass M abzählbar ist. Falls M leer ist, so gibt es nichts zu zeigen. Nehmen wir deshalb an, M sei nicht leer, d.h. es gibt mindestens eine Sprungstelle $p_0 \in M$. Wir haben in (c) gesehen, dass wir bei jedem Punkt $p \in M$ eine rationale Zahl $q \in \mathbb{Q}$ überspringen. Da f monoton wachsend ist, kann kein $q \in \mathbb{Q}$ mehrmals übersprungen werden. Es gibt also für jedes $q \in \mathbb{Q}$ höchstens ein $p \in M$, sodass $q \in]\lim_{x\to p^-} f(x), \lim_{x\to p^+}[$.
Somit dürfen wir folgende Abbildung definieren:

$$\Phi : \mathbb{Q} \to M : q \mapsto \begin{cases} p & \text{falls } q \in]\lim_{x\to p^-} f(x), \lim_{x\to p^+}[\\ p_0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wenn wir uns nun noch einmal anschauen, was wir in (c) gezeigt haben, so sehen wir, dass für jedes $p \in M$ ein $q \in \mathbb{Q}$ existiert mit $\Phi(q) = p$. Das heißt im Grunde: Φ ist surjektiv.

Bilder von abzählbaren Mengen sind wieder abzählbar. Somit ist M abzählbar und wir haben gezeigt, dass eine monoton wachsende Funktion nur an abzählbar vielen Stellen nicht stetig sein kann.

(e*) Absolute Bonus-Aufgabe: Sei $p \in \mathbb{R}$.

1.Fall: $p \in \mathbb{Q}$:
Setze $x_n := p + \frac{\sqrt{2}}{n}$. Man sieht sofort, dass die Folge gegen p konvergiert, weil $\frac{1}{n}$ gegen 0 konvergiert und wir die Grenzwertsätze benutzen können.

Als nächstes behaupte ich, die Folge besteht ausschließlich aus irrationalen Zahlen, d.h

$$(\forall n \in \mathbb{N}) x_n \notin \mathbb{Q}.$$

Dies zeigen wir per Widerspruch: Angenommen, es gäbe ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in \mathbb{Q}$, dann würde ja folgendes gelten:

$$\begin{aligned} x_n &= p + \frac{\sqrt{2}}{n} \\ \Longrightarrow x_n - p &= \frac{\sqrt{2}}{n} \\ \Longrightarrow (x_n - p) \cdot n &= \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Da x_n und p rationale Zahlen sind und $\mathbb{Q}$ ein Körper ist, ist die linke Seite der Gleichung auf jeden Fall wieder eine rationale Zahl. Wir wissen aber, dass die rechte Seite der Gleichung, die Wurzel aus 2, nicht rational ist. Wiederspruch.

Wir wissen jetzt also, dass die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nur aus irrationalen Zahlen besteht. Nach der Definition der Dirichlet-Funktion gilt somit $f(x_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da der Punkt p aber rational ist, gilt $f(p) = 1$.

Somit ist der Grenzwert der Bildfolge nicht gleich dem Funktionswert, folglich ist f nicht stetig an der Stelle p.

2.Fall: $p \notin \mathbb{Q}$:

Aus der Aufgabe (H24) wissen wir, dass es eine Zahlenfolge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gibt, die nur aus Elementen aus $\mathbb{Q}$ besteht und gegen die Zahl p konvergiert.

Nach der Definition der Dirichlet-Funktion gilt somit $f(a_n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da der Punkt p aber irrational ist, gilt $f(p) = 0$.

Somit ist der Grenzwert der Bildfolge nicht gleich dem Funktionswert, folglich ist f nicht stetig an der Stelle p.