

Analysis I für M, LaG und Ph, SS 2007

Tutorium 10, Lösungsskizze

Fixpunktsätze, Lipschitz-Stetigkeit und Kontraktionen

In diesem Tutorium beschäftigen wir uns mit verschiedenen Fixpunktsätzen. Unter einem Fixpunktsatz versteht man einen Satz, der Voraussetzungen angibt, die dafür sorgen, dass eine Funktion $f: X \rightarrow X$ (mindestens) einen Fixpunkt besitzt, also ein $p \in X$ mit $f(p) = p$. Als Hilfsmittel treten gewisse Arten von Funktionen auf, die besonders schöne Stetigkeitseigenschaften haben (Lipschitz-stetige Funktionen und Kontraktionen).

Aufgaben

T 31 (Lipschitz-Stetigkeit). Eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ zwischen metrischen Räumen (X, d_X) und (Y, d_Y) heißt *Lipschitz-stetig*, wenn es ein $L \geq 0$ gibt derart, dass

$$(\forall x, y \in X) \quad d_Y(f(x), f(y)) \leq L \cdot d_X(x, y).$$

Diese Eigenschaft nennt man auch eine (globale) Lipschitzbedingung. Kann man $L < 1$ wählen, so nennt man f eine *Kontraktion*.

- (a) Zeige, dass jede Lipschitz-stetige Funktion stetig ist.
- (b) Welche der folgenden Funktionen ist Lipschitz-stetig?

$$\begin{array}{llll} f: & [0, 1] & \rightarrow & \mathbb{R} & f(x) & := & x \\ g: & [0, 1] & \rightarrow & \mathbb{R} & g(x) & := & x^2 \\ h: & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} & h(x) & := & x^2 \\ w: & [0, 1] & \rightarrow & \mathbb{R} & w(x) & := & \sqrt{x} \end{array}$$

- (c) Sind f bzw. g Kontraktionen? Wie steht es mit $s: [0, \frac{1}{3}] \rightarrow \mathbb{R}$, $s(x) := x^2$?

(a) Wir dürfen annehmen, dass $L > 0$ ist (nachdem wir L notfalls vergrößern). Sei $p \in X$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir setzen $\delta := \frac{\varepsilon}{L}$. Ist dann $x \in X$ mit $d_X(x, p) < \delta$, so folgt

$$d_Y(f(x), f(p)) \leq L \cdot d_X(x, p) < L \cdot \delta = \varepsilon.$$

Somit ist f stetig in p .

(b) Die Funktion f ist Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L = 1$, da

$$(\forall x, y \in [0, 1]) \quad |f(x) - f(y)| = |x - y| \leq 1 \cdot |x - y|.$$

Die Funktion g ist Lipschitz-stetig mit $L = 2$, da

$$\begin{aligned} |g(x) - g(y)| &= |x^2 - y^2| = |(x + y)(x - y)| = |x + y| \cdot |x - y| \\ &\leq (|x| + |y|) \cdot |x - y| \leq 2|x - y| \end{aligned} \tag{1}$$

für alle $x, y \in [0, 1]$.

Die Funktion h ist nicht Lipschitz-stetig, denn wäre

$$|h(x) - h(y)| = |x + y| \cdot |x - y| \leq L \cdot |x - y|$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$, so wäre für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \neq y$

$$|x + y| \leq L. \quad (2)$$

Wählen wir $x := L + 1$ und $y := 0$, so ist aber $|x + y| = L + 1 > L$, Widerspruch.

Die Funktion w ist nicht Lipschitz-stetig. Es gilt nämlich

$$|w(x) - w(y)| = |\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \cdot |\sqrt{x} + \sqrt{y}|}{|\sqrt{x} + \sqrt{y}|} = \frac{|\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2}|}{|\sqrt{x} + \sqrt{y}|} = \frac{|x - y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

und somit für $x \neq y$

$$\frac{|w(x) - w(y)|}{|x - y|} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung können wir für kleine x und y größer machen als jede vorgegebene Schranke L .

(c) Da $|f(1) - f(0)| = 1 = |1 - 0|$ und $|g(1) - g(0)| = 1 = |1 - 0|$, sind f und g keine Kontraktionen. Jedoch gilt nach (1)

$$|s(x) - s(y)| \leq (|x| + |y|) \cdot |x - y| \leq \frac{2}{3} |x - y|$$

für alle $x, y \in [0, \frac{1}{3}]$. Also ist s eine Kontraktion mit Kontraktionskonstante $\frac{2}{3}$.

T 32 (Banachscher Fixpunktsatz).

In dieser Aufgabe beweisen wir einen extrem wichtigen Fixpunktsatz:

Banachscher Fixpunktsatz. Es sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $f: X \rightarrow X$ eine Kontraktion. Dann hat f genau einen Fixpunkt.

Zum Beweis gehen wir in Schritten vor. Zunächst wählen wir ein $L \in [0, 1[$ derart, dass $d(f(x), f(y)) \leq L d(x, y)$ für alle $x, y \in X$.

- (a) Zeige, dass die Kontraktion f höchstens einen Fixpunkt haben kann (Widerspruchsbeweis!)

Um die Existenz eines Fixpunkts zu zeigen, wählen wir irgendeinen Punkt $x_0 \in X$ und definieren rekursiv eine Folge in X via $x_{n+1} := f(x_n)$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Wir prüfen nun nach, dass die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ gegen einen Fixpunkt von f konvergiert.

- (b) Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq L^n d(x_1, x_0).$$

- (c) Zeige, dass $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Cauchy-Folge ist.

- (d) Zeige, dass $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ gegen ein $p \in X$ konvergiert und dieses p ein Fixpunkt von f ist.

Damit ist der Beweis erledigt. In Anwendungen genügt es häufig, den Fixpunkt p näherungsweise zu kennen. Man begnügt sich dann mit einem der oben rekursiv berechneten Punkte x_n , für genügend großes n . Aus dem Beweis lässt sich eine nützliche Abschätzung für den Fehler der Näherung ableiten:

- (e) Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$d(p, x_n) \leq \frac{L^n}{1-L} d(x_1, x_0).$$

- (f) Finde eine Kontraktionskonstante L für

$$f: \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \rightarrow \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \quad f(x) := x^3 - \frac{1}{4};$$

benutze hierbei, dass $x^3 - y^3 = (x - y) \cdot (x^2 + xy + y^2)$. Um den Fixpunkt p von f näherungsweise zu bestimmen, setzen wir $x_0 := 0$, $x_{n+1} := f(x_n)$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Wie groß muss man n wählen, um sicher sein zu können, dass

$$|p - x_n| < \frac{1}{100}?$$

- (a) Wären $p, q \in X$ zwei verschiedene Fixpunkte von f , so wäre $d(p, q) > 0$. Somit wäre

$$d(p, q) = d(f(p), f(q)) \leq L d(p, q);$$

da Gleichheitszeichen gilt hierbei, da $f(p) = p$ und $f(q) = q$; die Ungleichung gilt, da f eine Kontraktion mit Kontraktionskonstante L ist. Division durch $d(p, q)$ führt auf den Widerspruch $1 \leq L$.

- (b) Beweis per vollständiger Induktion. Für $n = 0$ gilt

$$d(x_1, x_0) = 1 \cdot d(x_1, x_0) \leq 1 \cdot d(x_1, x_0) = L^0 \cdot d(x_1, x_0),$$

wie behauptet. Wissen wir bereits, dass

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq L^n d(x_1, x_0)$$

für ein gewisses $n \in \mathbb{N}_0$, so folgt

$$d(x_{n+2}, x_{n+1}) = d(f(x_{n+1}), f(x_n)) \leq L \cdot d(x_{n+1}, x_n) \leq L \cdot L^n d(x_1, x_0) = L^{n+1} d(x_1, x_0),$$

was den Beweis beendet.

- (c) Seien $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \geq m$. Dann ist

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq \sum_{k=m}^{n-1} d(x_{k+1}, x_k) \\ &\leq \sum_{k=m}^{n-1} L^k d(x_1, x_0) = L^m \sum_{k=0}^{n-m-1} L^k d(x_1, x_0) \\ &= L^m \frac{1 - L^{n-m}}{1 - L} d(x_1, x_0) \leq \frac{L^m}{1 - L} d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Hierbei haben wir zunächst die Dreiecksungleichung (mehrmals) angewandt, anschließend Aufgabenteil (b) und dann die geometrische Summenformel.

Sei nun $\varepsilon > 0$ gegeben. Da $\frac{L^m}{1-L} d(x_1, x_0) \rightarrow 0$ für $m \rightarrow \infty$, finden wir ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $\frac{L^m}{1-L} d(x_1, x_0) < \varepsilon$ für alle $m \geq N$. Nach den vorigen Abschätzungen gilt dann

$$(\forall n, m \geq N) \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Also ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge.

(d) Da der metrische Raum X per Voraussetzung vollständig ist, konvergiert die Cauchy-Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, etwa gegen $p \in X$. Per Konstruktion gilt

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0) \quad x_{n+1} = f(x_n).$$

Für $n \rightarrow \infty$ geht die linke Seite gegen $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = p$. Da f stetig ist, geht die rechte Seite gegen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = f(p)$$

(siehe Satz IV.1.3 (3)). Also ist $p = f(p)$, d.h. p ist tatsächlich ein Fixpunkt von f .

(e) Ist $m \in \mathbb{N}_0$ beliebig, so gilt für alle $n \geq m$ nach der Lösung zu (c):

$$d(x_n, x_m) \leq \frac{L^m}{1-L} d(x_1, x_0). \quad (3)$$

Wir halten m fest. Da die Funktion $d(\bullet, x_m): X \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto d(x, x_m)$ nach Beispiel IV.1.2 stetig ist, liefert Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ in (3) unter Benutzung von Satz III.2.13 (6):

$$d(p, x_m) = d\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n, x_m\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_m) \leq \frac{L^m}{1-L} d(x_1, x_0).$$

Dies war zu zeigen.

(f) Für alle $x, y \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ gilt

$$|f(x) - f(y)| = |x^3 - y^3| = |x - y| \cdot |x^2 + xy + y^2| \leq |x - y| \cdot (|x|^2 + |x| \cdot |y| + |y|^2) \leq \frac{3}{4} \cdot |x - y|.$$

Also ist f eine Kontraktion mit Kontraktionskonstante $L = \frac{3}{4}$.

Es ist $x_0 := 0$, $x_1 := f(x_0) = f(0) = -\frac{1}{4}$ und somit $|x_1 - x_0| = |-\frac{1}{4} - 0| = \frac{1}{4}$. Nach der Formel aus (e) gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$|p - x_n| \leq \frac{L^n}{1-L} |x_1 - x_0| \leq \frac{(\frac{3}{4})^n}{\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{4} = \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

Es ist $(\frac{3}{4})^{17} = 0,0075\dots < 0.01$ (und somit $(\frac{3}{4})^n < 0.01$ für alle $n \geq 17$). Ab x_{17} hat man also sicher die gewünschte Genauigkeit.