Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K.-H. Neeb
Dipl.-Math. Rafael Dahmen,
Dipl.-Math. Stefan Wagner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2007
14.6.2007

9. Tutorium zur „Analysis I für M, LaG und Ph“

Aufgaben und Lösungen

In diesem Tutorium werden wir zeigen, dass sich jede positive reelle Zahl zu einer Basis b darstellen lässt. Für $b = 10$ ergibt dies die gewöhnliche Dezimaldarstellung, die wir aus der Schule kennen. Für $b = 2$ ergibt dies die sogenannte Dualdarstellung, die in der Informatik sehr oft benötigt wird.

Folgende einfache Tatsache könnte hilfreich sein: Wenn $x \in \mathbb{N}_0, y \in \mathbb{N}$ gegeben sind, dann können wir die sogenannte Division mit Rest durchführen, d.h. es gibt eindeutig bestimmte Zahlen $m \in \mathbb{N}_0$,$c \in \{0, \ldots, y-1\}$, sodass

$$x = m \cdot y + c$$

Sei nun b eine fest gewählte natürliche Zahl größer 1, d.h. $b \in \{2, 3, 4, 5, \ldots\}$.

Aufgabe T29 (b-ale Darstellung von natürlichen Zahlen)

(a) Sei $(c_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge von Zahlen aus der Menge $\mathcal{D} := \{0, 1, \ldots, b-1\}$. Wir nehmen weiterhin an, dass die Folge nur endlich viele Folgenglieder ungleich 0 besitzt. Mache dir klar, dass die folgende Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k b^k$$

nur eine endliche Summe ist und somit konvergiert und dass die Summe in $\mathbb{N}_0$ liegt.

(b) Wir wollen nun zeigen, dass sich jede natürliche Zahl als eine solche Summe schreiben lässt: Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Zeige mit einem Induktionsargument, dass es eine Folge $(c_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ in $\mathcal{D}$ gibt mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k b^k = n$$

(c) Jetzt, da wir die Existenz einer solchen Ziffernfolge $(c_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ gezeigt haben, möchten wir zeigen, dass diese Darstellung immer eindeutig ist. Nimm also an, es gebe eine weitere Folge $(d_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ in $\mathcal{D}$, die auch nach endlich vielen Stellen gleich 0 wird mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k b^k = \sum_{k=0}^{\infty} d_k b^k$$

Zeige per Induktion, dass alle $c_k = d_k$.

(d) Sei $\mathcal{D}^{(N_0)}$ die Menge aller Folgen in $\mathcal{D}$, die nach endlich vielen Gliedern konstant 0 werden. Betrachte die folgende Abbildung

$$\Phi : \mathcal{D}^{(N_0)} \longrightarrow \mathbb{N}_0 : (c_k)_{k\in\mathbb{N}_0} \longmapsto \sum_{k=0}^{\infty} c_k b^k$$

Mache dir klar, dass du in Schritten (b) und (c) die Bijektivität dieser Abbildung gezeigt hast. Welcher Aufgabenteil entspricht der Injektivität, welcher der Surjektivität?

(e) Stelle die Zahl $n = 42$ zur Basis $b = 2$ dar, d.h. finde die Binärdarstellung dieser Zahl.

Lösung:

(a) Da die Folge $(c_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ nach endlich vielen Gliedern konstant 0 wird, wird auch die Folge $\left(c_k b^k\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ nach endlich vielen Gliedern gleich 0. Wenn eine Folge konstant 0 wird, dann ist die unendliche Reihe über diese Folge nur eine endliche Summe, also trivialerweise konvergent. Eine endliche Summe aus Zahlen aus $\mathbb{N}_0$ liegt natürlich wieder in $\mathbb{N}_0$.

(b) Wir beginnen mit einer Art Induktionsverankerung: Der Fall $n < b$: Die Zahl 0 läßt sich schreiben als $n \cdot b^0 + 0 \cdot b^1 + 0 \cdot b^2 + \cdots$.Das heißt: Wir setzen alle $c_k := 0$, bis auf $c_0 = n$.

Jetzt kommt die Art Induktionsschritt. Wir nehmen an, $n \geq b$ und wir nehmen weiterhin an, jede Zahl $m < n$ lässt sich in dieser Form schreiben. Wenn wir daraus folgern können, dass auch n eine b-ale Entwicklung besitzt, dann wäre die Aussage bewiesen.

Nun wenden wir die ,,Division mit Rest" auf die Zahl n und b an, d.h. wir teilen n durch b. Dies ist erlaubt, weil $b \geq 2$ und somit sicher $b > 0$.

Wir erhalten zwei Zahlen $m \in \mathbb{N}_0$ und $c \in \mathcal{D} := \{0, \ldots, b-1\}$ mit

$$n = m \cdot b + c$$

Da $n \geq b$ ist $m \geq 1$. Da $b > 1$ gilt: $m \cdot b > m$ und demnach $n = mb + c \geq mb > m$.
Also ist $m < n$ und nach Induktionsvoraussetzung hat m eine b-ale Entwicklung:

$$m = \sum_{k=0}^{\infty} c_k b^k$$

Nun multiplizieren wir mit b und addieren c und erhalten:

$$n = mb + c = \sum_{k=0}^{\infty} c_k b^{k+1} + c$$

Dies ist wieder eine b-ale Entwicklung.

(c) Angenommen wir haben zwei Ziffernfolgen $(c_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ und $(d_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ in $\mathcal{D}$ mit

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} c_k b^k = \sum_{k=0}^{\infty} d_k b^k$$

Wir wollen zeigen: $(\forall k \in \mathbb{N}_0) c_k = d_k$.
Induktionsverankerung: Die Zahl $n = \sum_{k=0}^{\infty} c_k b^k$ lässt sich ja schreiben als

$$n = \left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k b^{k-1}\right) \cdot b + c_0.$$

Aber ebenso lässt sie sich schreiben als

$$n = \left(\sum_{k=1}^{\infty} d_k b^{k-1}\right) \cdot b + d_0.$$

Da wir aber benutzen dürfen, dass bei einer „Division mit Rest" die Zahlen eindeutig sind, folgt daraus, dass $c_0 = d_0$.

Induktionsschritt: Wir nehmen an, alle $c_k = d_k$ für alle $k < k_0$. Dann können wir alle Terme $c_k b^k = d_k b^k$ für alle $k < k_0$ auf beiden Seiten der Gleichung

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} c_k b^k = \sum_{k=0}^{\infty} d_k b^k$$

abziehen und erhalten

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} c_k b^k = \sum_{k=k_0}^{\infty} d_k b^k$$

Teilen durch b^{k_0} bringt uns in die Form

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} c_k b^{k-k_0} = \sum_{k=k_0}^{\infty} d_k b^{k-k_0}$$

Nun gehen wir vor, wie in der Induktionsverankerung und erhalten, dass $c_{k_0} = d_{k_0}$.

(d) Die Surjektivität von Φ ist gerade Aufgabenteil (b) und die Injektivität ist Aufgabenteil (a).

(e)

$$\begin{aligned}
42 &= 21 \cdot 2 \\
&= (20+1) \cdot 2 \\
&= (10 \cdot 2 + 1) \cdot 2 \\
&= (5 \cdot 2^2 + 1) \cdot 2 \\
&= ((4+1) \cdot 2^2 + 1) \cdot 2 \\
&= ((2 \cdot 2 + 1) \cdot 2^2 + 1) \cdot 2 \\
&= ((2^2 + 1) \cdot 2^2 + 1) \cdot 2 \\
&= (2^4 + 2^2 + 1) \cdot 2 \\
&= 2^5 + 2^3 + 2^1 \\
&= 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0.
\end{aligned}$$

Die Folge $(c_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ lautet also $(0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, \ldots)$.

Aufgabe T30 (b-ale Darstellung von reellen Zahlen)

Um beliebige nichtnegative reelle Zahlen b-al entwickeln zu können, zerlegen wir sie in einen ganzzahligen Anteil und einen gebrochenen Anteil. $r := [r] + (r - [r])$. Hierbei ist $[r] := \max\{k \in \mathbb{N}_0 : k \leq r\}$ der ganzzahlige Anteil und $r - [r] \in [0, 1[$ ist der gebrochene Anteil.

(a) Sei $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zahlen aus der Menge $\mathcal{D} := \{0, 1, \ldots, b-1\}$. Wir nehmen diesmal *nicht* an, dass die Folge nach endlich vielen Schritten 0 wird. Zeige die Konvergenz der folgenden Reihe

$$\sum_{l=1}^{\infty} d_l b^{-l}$$

und zeige, dass ihr Grenzwert im abgeschlossenen Intervall $[0, 1]$ liegt.

(b) Wir wollen nun zeigen, dass sich jede reelle Zahl r im Intervall $[0, 1]$ als eine solche Reihe schreiben lässt. Zeige dies für die Spezialfälle $r = 0$ und $r = 1$.

(c) Sei nun $r \in]0, 1[$ und $l \in \mathbb{N}$. Zeige, dass es genau eine endliche Summe der Form

$$\sum_{j=1}^{l} d_j b^{-j}$$

gibt, sodass der Abstand dieser Summe zu r kleiner als b^{-l} ist.

(d) Zeige, dass sich die so gefundenen Koeffizienten nicht ändern, wenn l größer wird.

(e) Schließe, dass $\sum_{l=1}^{\infty} d_l b^{-l} = r$.

(f) Zeige an einem Beispiel, dass diese Darstellung *nicht* eindeutig ist, d.h. finde zwei unterschiedliche Folgen $(d_l)_{l\in\mathbb{N}}$ und $(e_l)_{l\in\mathbb{N}}$ derart, dass

$$\sum_{l=1}^{\infty} d_l b^{-l} \neq \sum_{l=1}^{\infty} e_l b^{-l}.$$

(g) Sei $\mathcal{D}^{N_0}$ die Menge aller Folgen in $\mathcal{D}$. Betrachte die folgende Abbildung

$$\Psi : \mathcal{D}^{N_0} \longrightarrow [0, 1] : (d_l)_{l\in\mathbb{N}} \longmapsto \sum_{l=1}^{\infty} d_l b^{-l}$$

Ist diese Abbildung injektiv? Ist sie surjektiv?

(h) Sei $\mathcal{M}$ die Menge aller Folgen in $\mathcal{D}$, die nach endlich vielen Gliedern konstant $(b-1)$ werden. Zeige: die eingeschränkte Version von Ψ

$$\widehat{\Psi} : \mathcal{D}^{N_0} \backslash \mathcal{M} \longrightarrow [0, 1[: (d_l)_{l\in\mathbb{N}} \longmapsto \sum_{l=1}^{\infty} d_l b^{-l}$$

ist bijektiv, d.h. jede reelle Zahl im halboffenen Intervall $[0, 1[$ besitzt genau eine b-ale Entwicklung, deren Ziffern niemals konstant $(b-1)$ wird.

Lösung:

(a) Da alle $d_l \leq (b-1)$ sind, lässt sich die Reihe wie folgt nach oben abschätzen:

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{\infty} d_l b^{-l} &\leq \sum_{l=1}^{\infty}(b-1)b^{-l} \\
&= (b-1)\sum_{l=1}^{\infty} b^{-l} \\
&= (b-1)\sum_{l=0}^{\infty} b^{-(l+1)} \\
&= (b-1)\frac{1}{b}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{1}{b}\right)^{l} \\
&= (b-1)\frac{1}{b}\frac{1}{1-\frac{1}{b}} \\
&= \frac{(b-1)}{b\left(1-\frac{1}{b}\right)} \\
&= \frac{b-1}{b-1} = 1.
\end{aligned}$$

Also konvergiert die Majorante gegen 1. Deshalb konvergiert die Reihe selbst gegen eine Zahl kleiner oder gleich 1.

(b) Falls $r = 0$ setze alle Koeffizienten auf 0. Falls $r = 1$ setze alle Koeffizienten auf $(b-1)$. Dann wird die Reihe genau die oben bereits berechnete Majorante und konvergiert deshalb gegen 1.

(c) Sei $r \in]0,1[$ und $l \in \mathbb{N}$. Wir sollen eine endliche Summe $\sum_{j=1}^{l} d_j b^{-j}$ finden mit

$$r - \sum_{j=1}^{l} d_j b^{-j} < b^{-l}$$

Diese Ungleichung ist äquivalent zu der folgenden Ungleichung, bei der wir einfach beide Seiten mit b^l multipliziert haben:

$$rb^l - \sum_{j=1}^{l} d_j b^{l-j} < 1.$$

Nun ist aber rb^l eine positive reelle Zahl und hat eine eindeutige Zerlegung in einen ganzzahligen Teil und einen gebrochenen Anteil, der kleiner als 1 ist. Wir wissen also, dass es eine eindeutige natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ gibt mit

$$rb^l - n < 1.$$

Und in der ersten Aufgabe haben wir gesehen, dass sich jede Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ eine eindeutige b-al-Entwicklung besitzt.

(d) Sei $\sum_{j=1}^{l} d_j b^{-j}$ die eindeutige Summe mit l Summanden, die von r den Abstand kleiner als b^{-l} hat. Sei $\sum_{j=1}^{l+1} e_j b^{-j}$ nun die eindeutige Summe mit $l+1$ Summanden, die von r den Abstand kleiner als $b^{-(l+1)}$ hat. Wir wollen nun zeigen, dass die Koeffizienten d_j gleich den Koeffizienten e_j sind für alle $j \leq l$.

Wir beginnen mit der zweiten Summe, die von r einen Abstand kleiner als $b^{-(l+1)}$ hat:

$$\begin{aligned}
r - \sum_{j=1}^{l+1} e_j b^{-j} &< b^{-(l+1)} \\
r - \left(\sum_{j=1}^{l} e_j b^{-j} + e_{l+1} b^{-(l+1)} \right) &< b^{-(l+1)} \\
r - \sum_{j=1}^{l} e_j b^{-j} - e_{l+1} b^{-(l+1)} &< b^{-(l+1)} \\
r - \sum_{j=1}^{l} e_j b^{-j} &< b^{-(l+1)} + e_{l+1} b^{-(l+1)} \\
r - \sum_{j=1}^{l} e_j b^{-j} &< \underbrace{(1 + \underbrace{e_{l+1}}_{<b})}_{\leq b} \frac{1}{b^{l+1}} \leq \frac{1}{b^l} = b^{-l}.
\end{aligned}$$

Somit haben wir gezeigt, dass die Summe $\sum_{j=1}^{l} e_j b^{-j}$ ebenfalls die Eigenschaft hat, von r den Abstand kleiner b^{-l} zu haben. Wir wissen aber, dass es nur eine endliche Summe mit l Summanden dieser Form geben kann mit dieser Eigenschaft. Deshalb müssen alle $b_j = e_j$ sein.

(e) Wir haben in der (d) gezeigt haben, dass die d_l nicht vom k abhängen. Es gibt also eine Folge $(d_l)_{l \in \mathbb{N}}$, die erfüllt, dass

$$(\forall l \in \mathbb{N}) \ r - \sum_{j=1}^{l} d_j b^{-j} < b^{-l}$$

Die rechte Seite konvergiert gegen 0, also konvergiert die Summe $\left(\sum_{j=1}^{l} d_j b^{-j} \right)_{l \in \mathbb{N}}$ monton wachsend gegen r.

(f) $0,0(b-1)(b-1)(b-1)\ldots = 0,1$.

(g) Die Abbildung ist nicht injektiv, da die Entwicklung nicht eindeutig ist, siehe (f), die Abbildung ist aber surjektiv, da jedes $r \in [0,1]$ eine solche Entwicklung besitzt. Siehe (b) und Teil (e).

(h) Zuerst überlegen wir uns, warum der Wertebereich $[0,1[$ überhaupt erlaubt ist, d.h. warum jede Summe kleiner als 1 ist. Da die Folge $(d_l)_{l \in \mathbb{N}}$ nicht konstant $(b-1)$ wird, muss sie mindestens an einem Index kleiner als $(b-1)$ sein, d.h.

$$\sum_{l=1}^{\infty} d_l b^{-l} < \sum_{l=1}^{\infty} (b-1) b^{-l} = 1.$$

Warum ist die Abbildung surjektiv?
Sei $r \in [0,1[$. In (c) und(d) haben wir dann die Folge $(d_l)_{l \in \mathbb{N}}$ konstruiert, die

$$(\forall l \in \mathbb{N}) \ r - \sum_{j=1}^{l} d_j b^{-j} < b^{-l}$$

erfüllen.

Es bleibt zu zeigen, dass diese Folge $(d_l)_{l\in\mathbb{N}}$ nie konstant $(b-1)$ wird. Nehmen wir deshalb per Widerspruch an, sie würde für alle $l > l_0$ ab irgendeinem Punkt $l_0 \in \mathbb{N}$ konstant $(b-1)$ werden:

$$\begin{aligned}
r &= \sum_{l=1}^{\infty} d_l b^{-l} \\
&= \sum_{l=1}^{l_0} d_l b^{-l} + \sum_{l=l_0+1}^{\infty} (b-1) b^{-l} \\
&= \sum_{l=1}^{l_0} d_l b^{-l} + (b-1)\left(\frac{1}{b^{l_0+1}} + \frac{1}{b^{l_0+2} + \cdots}\right) \\
&= \sum_{l=1}^{l_0} d_l b^{-l} + (b-1)\frac{1}{b^{l_0+1}}\left(1 + \frac{1}{b} + \frac{1}{b^2} + \cdots\right) \\
&= \sum_{l=1}^{l_0} d_l b^{-l} + (b-1)\frac{1}{b^{l_0+1}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{b}} \\
&= \sum_{l=1}^{l_0} d_l b^{-l} + (b-1)\frac{1}{b^{l_0}} \cdot \frac{1}{b-1} \\
&= \sum_{l=1}^{l_0} d_l b^{-l} + \frac{1}{b^{l_0}} \\
&= \sum_{l=1}^{l_0} d_l b^{-l} + b^{-l_0}.
\end{aligned}$$

Nun substrahieren wir auf beiden Seiten die Summe und erhalten:

$$r - \sum_{l=1}^{l_0} d_l b^{-l} = b^{-l_0}.$$

Dies ist ein direkter Widerspruch zur Konstruktion der $(d_l)_{l\in\mathbb{N}}$, da der Abstand auf der linken Seite immer kleiner als b^{-l_0} sein muss und nicht – wie hier – gleich.
Warum ist die Abbildung injektiv?
Wir wissen bereits, dass für gegebenes $r \in [0,1[$ die Folge Fld_l mit

$$(\forall l \in \mathbb{N})\ r - \sum_{j=1}^{l} d_j b^{-j} < b^{-l}$$

eindeutig ist und dass $r = \sum_{l=1}^{\infty} d_l b^{-l}$ gilt.
Nehmen wir an, wir hätten eine andere Darstellung $r = \sum_{l=1}^{\infty} e_l b^{-l}$, die trotzem erfüllt, dass

die Koeffizitentenfolge $(e_l)_{l\in\mathbb{N}}$ nie konstant $(b-1)$ wird.

$$\begin{aligned}
r &= \sum_{j=1}^{\infty} e_j b^{-j} \\
&= \sum_{j=1}^{l} e_j b^{-j} + \sum_{j=l+1}^{\infty} e_j b^{-j} \\
&< \sum_{j=1}^{l} e_j b^{-j} + \sum_{j=l+1}^{\infty} (b-1) b^{-j} \\
&= \sum_{j=1}^{l} e_j b^{-j} + (b-1)\left(\frac{1}{b^{l+1}} + \frac{1}{b^{l+2} + \cdots}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{l} e_j b^{-j} + (b-1)\frac{1}{b^{l+1}}\left(1 + \frac{1}{b} + \frac{1}{b^2} + \cdots\right) \\
&= \sum_{j=1}^{l} e_j b^{-j} + (b-1)\frac{1}{b^{l+1}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{b}} \\
&= \sum_{j=1}^{l} e_j b^{-j} + (b-1)\frac{1}{b^{l}} \cdot \frac{1}{b-1} \\
&= \sum_{j=1}^{l} e_j b^{-j} + \frac{1}{b^{l}} \\
&= \sum_{j=1}^{l} e_j b^{-j} + b^{-l}.
\end{aligned}$$

Also erfüllt auch die Folge $(e_l)_{l\in\mathbb{N}}$ die Bedingung, nach der $(d_l)_{l\in\mathbb{N}}$ eindeutig konstuiert wurde. Somit sind die beiden Folgen gleich.

Also ist Abbildung surjektiv und injektiv, also bijektiv.