Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K.-H. Neeb
Dipl.-Math. Rafael Dahmen,
Dipl.-Math. Stefan Wagner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
Sommersemester 2007
31.5.2007

7. Tutorium zur „Analysis I für M, LaG und Ph“

Aufgaben und Lösungen

Konstruktion der Reellen Zahlen aus den Rationalen Zahlen

Wir haben die reellen Zahlen axiomatisiert (als einen vollständig angeordneten Körper), wissen aber noch nicht, ob solche Körper überhaupt existieren. In diesem Tutorium holen wir das nach und konstruieren die reellen Zahlen aus den rationalen.

Hierzu definieren wir uns auf dem angeordneten Körper $\mathbb{Q}$ die Abstandsfunktion

$$d : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, (x, y) \mapsto |x - y|$$

Da wir die reellen Zahlen noch nicht zur Verfügung haben, haben hier statt $\mathbb{R}$ (wie üblich bei Abstandsfunktionen) den Körper $\mathbb{Q}$ als Wertebereich genommen. Dies stört aber nicht, und können trotzdem von konvergenten Folgen und Cauchy-Folgen in $\mathbb{Q}$ reden. Wir erinnern daran, dass eine Nullfolge eine Folge ist, die gegen 0 konvergiert.

Die reellen Zahlen werden schließlich gewisse Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen sein.

Hinweis: Die Konstruktion ist recht umfangreich, und wir erwarten nicht, dass alle Schritte durchgeführt werden! Insbesondere die mit Sternchen versehenen Aufgabenteile sollte man zwar durchlesen, aber jetzt nicht bearbeiten.

Aufgabe T23 (Vorüberlegungen zu Cauchy-Folgen)

Es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folgen in $\mathbb{Q}$.

(a) Zeige, dass $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.

(b) Zeige, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist.

(c) Zeige, dass $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.

(d) Zeige: Falls $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge, so gibt eine rationale Zahl $\epsilon > 0$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ derant, dass entweder

$$(\forall n \geq n_0) x_n \geq \epsilon \text{ oder } (\forall n \geq n_0) x_n \leq -\epsilon$$

gilt.

(e) Zeige, dass für alle $a, b \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$ gilt: $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{a}(b - a)\frac{1}{b}$.

(f) Zeige: Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge und ist $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $\left(\frac{1}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge.

Lösung:

(a) Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folgen. Wir wollen zeigen, dass $(x_n+y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls eine Cauchy-Folge ist. Informell heißt das ja, dass die Abstände zwischen zwei Folgengliedern ab irgendeinem Index beliebig klein werden. Deshalb ist es sinnvoll, sich Differenzen von Folgengliedern anzuschauen:

$$|(x_k+y_k)-(x_l+y_l)| = |(x_k-x_l)+(y_k-y_l)| \leq |x_k-x_l|+|y_k-y_l|$$

(Dies gilt wegen der Dreiecksungleichung für den Betrag in $\mathbb{Q}$)
Diese beiden Beträge werden aber beliebig klein, weil $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folgen sind.
Ganz formal heißt das also:
Gegeben sei ein $\epsilon > 0$.
Weil $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist, gibt es ein $N_1 \in \mathbb{N}$ mit $(\forall k,l > N_1)|x_k-x_l| < \frac{\epsilon}{2}$.
Weil $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist, gibt es ein $N_2 \in \mathbb{N}$ mit $(\forall k,l > N_2)|y_k-y_l| < \frac{\epsilon}{2}$.
Setze nun $N := \max\{N_1, N_2\}$. Dann gilt für alle $k,l > N$, dass sowohl $k,l > N_1$ als auch $k,l > N_2$. Wir haben also $|x_k-x_l| < \frac{\epsilon}{2}$ und $|y_k-y_l| < \frac{\epsilon}{2}$.
Nun berechnen wir den Abstand zwischen den Folgengliedern für $k,l > N$

$$|(x_k+y_k)-(x_l+y_l)| = |(x_k-x_l)+(y_k-y_l)| \leq \underbrace{|x_k-x_l|}_{<\frac{\epsilon}{2}}+\underbrace{|y_k-y_l|}_{<\frac{\epsilon}{2}} < \epsilon.$$

Damit haben wir folgendes bewiesen:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall k,l > N)\,|(x_k+y_k)-(x_l+y_l)| < \epsilon$$

Also ist $(x_n+y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge.

(b) Setze $\epsilon := 1$. Dann gilt, weil $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist, dass einen Index $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für alle $k,l > N$ der Abstand $|x_k-x_l| < 1$ ist. Sei $k_0 : +N+1$. Dann gilt für alle $l > N$, dass der Abstand von x_l zu x_{k_0} kleiner 1 ist. Aus der Dreiecksungleichung folgt nun, dass

$$|x_l| = |(x_l-x_{k_0})+x_{k+0}| \leq |x_l-x_{k_0}|+|x_{k+0}| < 1+|x_{k_0}|.$$

Das heißt: Alle Folgenglieder ab dem Index N sind betragsmäig durch $1+|x_{k_0}|$ beschränkt. Die anderen Folgenglieder $\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ sind aber auch betragsmäig beschränkt, weil es nur endlich viele sind. Setze also $C := \max\{x_1, x_2, \ldots, x_N, 1+|x_{k_0}|\}$. Dann gilt für alle $l \in \mathbb{N}$, dass $|x_l| \leq C$ ist. Somit ist die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt.

(c) Wir betrachten wieder – wie im Aufgabenteil (a) – die Abstände von Folgengliedern der Folge $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$|x_k y_k - x_l y_l|$$

Wir wissen nach Voraussetzung, dass $|x_k-x_l|$ beliebig klein wird, da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist. Deshalb möchten wir den obigen Ausdruck so umformen, dass $|x_k - x_l$ darin vorkommt. Um den Term $x_k y_l$ verwenden zu können, müssen wir also das y_l ausklammern. Deshalb fügen wir hier geschickt eine Null ein, d.h. wir addieren den Term $-x_l y_k + x_l y_k$:

$$\begin{aligned}
|x_k y_k - x_l y_l| &= |x_k y_k - x_l y_k + x_l y_k - x_l y_l| \\
&= |(x_k-x_l)y_k + x_l(y_k-y_l)| \\
&\leq |(x_k-x_l)y_k| + |x_l(y_k-y_l)| \\
&= |x_k-x_l|\cdot|y_l| + |x_l|\cdot|y_k-y_l|
\end{aligned}$$

Hier haben wir nun zwei Terme $|x_k - x_l|$ und $|y_k - y_l|$, die beliebig klein werden und jeweils multipliziert werden mit Termen $|y_l|$ und $|x_l|$, die nach Aufgabenteil (b) beschränkt sind.

Soweit zur groben Idee.

Formal bedeutet dies:

Sei $\epsilon > 0$.

Da die Folge $(|x_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Aufgabenteil (b) beschränkt ist, gibt es ein $C_1 > 0$ mit $(\forall k \in \mathbb{N})|x_k| \leq C_1$.

Da die Folge $(|y_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Aufgabenteil (b) beschränkt ist, gibt es ein $C_2 > 0$ mit $(\forall l \in \mathbb{N})|y_l| \leq C_2$.

Weil $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist, gibt es ein $N_1 \in \mathbb{N}$ mit $(\forall k, l > N_1)|x_k - x_l| < \frac{\epsilon}{2C_2}$.

Weil $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist, gibt es ein $N_2 \in \mathbb{N}$ mit $(\forall k, l > N_2)|y_k - y_l| < \frac{\epsilon}{2C_1}$.

Setze nun $N := \max\{N_1, N_2\}$.

Dann gilt für alle $k, l > N$, dass

$$\begin{aligned} |x_k y_k - x_l y_l| &\leq |x_k - x_l| \cdot |y_l| + |x_l| \cdot |y_k - y_l| \\ &\leq |x_k - x_l| \cdot C_2 + C_1 \cdot |y_k - y_l| \\ &< \frac{\epsilon}{2C_2} \cdot C_2 + C_1 \cdot \frac{\epsilon}{2C_1} = \epsilon. \end{aligned}$$

(d) Wir nehmen nun an, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei keine Nullfolge. Wir wollen folgende Aussage zeigen:

$$(\exists \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})\Big((\forall n \geq n_0)x_n \geq \epsilon \text{ oder } (\forall n \geq n_0)x_n \leq -\epsilon\Big)$$

Wir zeigen dies per Widerspruch. Wir nehmen an, diese Aussage sei falsch. Das bedeutet, die formale Negation davon wäre wahr:

$$(\forall \epsilon > 0)(\forall n_0 \in \mathbb{N})\Big((\exists n \geq n_0)x_n < \epsilon \text{ und } (\exists n \geq n_0)x_n > -\epsilon\Big) \tag{1}$$

Nun dürfen wir ja auch noch verwenden, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist, d.h.

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall k, l > n_0)|x_k - x_l| < \epsilon$$

Sei also nun $\epsilon > 0$ eine beliebige fest gewählte positive rationale Zahl.

Dann gibt es – weil $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist – ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$(\forall k, l > n_0)|x_k - x_l| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{2}$$

Nun wenden wir Gleichung (1) auf genau dieses $\frac{\epsilon}{2}$ und dieses n_0 an und erhalten ein $n_1 \geq n_0$ mit $x_{n_1} < \frac{\epsilon}{2}$ und ein $n_2 \geq n_0$ mit $x_{n_2} > -\frac{\epsilon}{2}$.

Sei nun $n > n_0$ beliebig. Dann gilt:

$$\begin{aligned} x_n &= x_n - x_{n_1} + x_{n_1} \\ &\leq |x_n - x_{n_1}| + x_{n_1} \\ &< \frac{\epsilon}{2} + x_{n_1} \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Also ist $x_n < \epsilon$. Analog rechnen wir für $-x_n$:

$$\begin{aligned} -x_n &= -x_n + x_{n_2} - x_{n_2} \\ &\leq |-x_n + x_{n_2}| - x_{n_2} \\ &= |x_n - x_{n_2}| - x_{n_2} \\ &< \frac{\epsilon}{2} - x_{n_2} \\ &< \frac{\epsilon}{2} - \left(-\frac{\epsilon}{2}\right) = \epsilon. \end{aligned}$$

Also haben wir gezeigt, dass $x_n < \epsilon$ und $-x < \epsilon$. Folglich ist $|x_n| < \epsilon$.
Zusammenfassend haben wir also gezeigt:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)|x_n| < \epsilon.$$

Also ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Widerspruch zur Voraussetzung.

(e) Dies ist nun relativ einfach:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} - \frac{1}{b} &= \frac{b}{ab} - \frac{a}{ab} \\ &= \frac{b-a}{ab} \\ &= \frac{1}{a}(b-a)\frac{1}{b}. \end{aligned}$$

(f) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge, die keine Nullfolge ist und sei $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Um zu zeigen, dass $\left(\frac{1}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist, betrachten wir – wie üblich – zuerst einmal Differenzen dieser Folge:

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{x_k} - \frac{1}{x_l}\right| &= \left|\frac{1}{x_k}(x_k - x_l)\frac{1}{x_l}\right| \\ &= \frac{1}{|x_k|} \cdot |x_k - x_l| \cdot \frac{1}{|x_l|}. \end{aligned}$$

Der mittlere Term wird beliebig klein, weil $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Voraussetzung eine Cauchy-Folge ist. Um die anderen beiden Terme nach oben abzuschäetzen, benutzen wir Aufgabenteil (d): Weil $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge ist, gibt es – nach Aufgabenteil (d) – eine Zahl $\epsilon_1 > 0$ und einen Index $n_1 \in \mathbb{N}$, sodass entweder

$$(\forall n > n_1)x_n \geq \epsilon_1$$

oder

$$(\forall n > n_1)x_n \leq -\epsilon_1$$

gilt. In beiden Fällen folgt daraus aber sofort, dass

$$(\forall n > n_1)|x_n| \geq \epsilon_1.$$

Dies bedeutet nun aber:

$$(\forall n > n_1)\frac{1}{|x_n|} \leq \frac{1}{\epsilon_1}.$$

Sei nun $\epsilon > 0$ beliebig.
Dann gibt es – weil $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist, ein $n_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$(\forall k, l > n_2)|x_k - x_l| < \epsilon \cdot (\epsilon_1)^2.$$

Sei nun $N := \max\{n_1, n_2\}$. Dann gilt für alle $k, l > N$, dass

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{x_k} - \frac{1}{x_l}\right| &= \frac{1}{|x_k|} \cdot |x_k - x_l| \cdot \frac{1}{|x_l|} \\ &\leq \frac{1}{\epsilon_1} \cdot |x_k - x_l| \cdot \frac{1}{\epsilon_1} \\ &< \frac{1}{\epsilon_1} \cdot \epsilon \cdot (\epsilon_1)^2 \cdot \frac{1}{\epsilon_1} = \epsilon.\end{aligned}$$

Also ist $\left(\frac{1}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge.

Aufgabe T24 (Die reellen Zahlen als Menge und Körper)
Sei $\mathcal{C}$ die Menge aller Cauchy-Folgen in $\mathbb{Q}$.

(a) Wir sagen, zwei Cauchy-Folgen heißen *äquivalent* und schreiben $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, falls $x_n - y_n \to 0$. Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{C}$ ist. (siehe letztes Tutorium für die Definition einer Äquivalenzrelation)

Wir definieren nun: $\mathbb{R} := \mathcal{C}/\sim$. Im Folgenden meint $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ die Äquivalenzklasse von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) Zeige, dass die Summe und das Produkt von zwei Äquivalenzklassen wohldefiniert ist, d.h. unabhängig von der Wahl des Repräsentanten.

(c) Zeige, dass $(\mathbb{R}, +)$ eine abelsche Gruppe ist.

(d)* Zeige, dass die Multiplikation assoziativ ist, ein Neutralelement besitzt und für $+$ und $\cdot$ das Distributivgesetz gilt.

(e) Zeige, dass jedes Element $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in \mathbb{R}$, dass von $[(0)_{n\in\mathbb{N}}]$ verschieden ist, multiplikativ invertierbar ist, d.h. $\mathbb{R}$ ist ein Körper.

Lösung:

(a) Wir müssen Reflexivität, Symmetrie und Transitivität zeigen:

(Reflexivität) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge. Dann ist $x_n - x_n = 0 \to 0$. Also gilt für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Also ist die Relation $\sim$ reflexiv.

(Symmetrie) Angenommen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für zwei Cauchyfolgen. Dann bedeutet dies ja, dass $x_n - y_n \to 0$. Das heißt: $|x_n - y_n| \to 0$ und das widerum ist äquivalent zu $y_n - x_n \to 0$. Also ist $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Also ist die Relation $\sim$ symmetrisch.

(Transitivität) Angenommen für Cauchyfolgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gelte: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann hieße das ja, dass die Folgen $(x_n - y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n - z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 konvergieren. Nach unseren Grenzwertsätzen dürfen wir aber konvergente Folgen addieren und es addieren sich dabei die Grenzwerte: $(x_n - y_n) + (y_n - z_n) = x_n - z_n \to 0 + 0 = 0$. Folglich gilt auch $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Also ist die Relation $\sim$ transitiv.

(b) Wir müssen zeigen, dass falls $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (y'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind, dass dann auch Summen äquivalent sind:

$$(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim \left(x'_n + y'_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Per Definition von $\sim$ heit das, wir müssen zeigen, dass $(x_n + y_n) - (x'_n + y'_n) \to 0$. Dies sieht man allerdings sehr schnell ein, denn es gilt:

$$(x_n + y_n) - (x'_n + y'_n) = \underbrace{(x_n - x'_n)}_{\to 0} + \underbrace{(y_n - y'_n)}_{\to 0} \longrightarrow 0.$$

Nun das ganze analog für Produkte:

$$\begin{aligned}(x_n \cdot y_n) - (x'_n \dot{y}'_n) &= x_n y_n - x'_n y' n \\ &= x_n y_n - x'_n y_n + x'_n y_n - x' n y' n \\ &= (x_n - x'_n) y_n - x'_n (y_n - y' n) \\ &= \underbrace{(x_n - x'_n)}_{\to 0} \cdot \underbrace{y_n}_{\text{beschränkt}} - \underbrace{x'_n}_{\text{beschränkt}} \cdot \underbrace{(y_n - y' n)}_{\to 0} \\ &\longrightarrow 0.\end{aligned}$$

]

(c) Wir wissen, dass $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ein Körper ist, also ist insbesondere $(\mathbb{Q}, +)$ eine abelsche Gruppe. Die Addition der rationalen Cauchyfolgen ist ja punktweise definiert, also ist die Menge der rationalen Cauchyfolgen mit punktweisen Addition ebenfalls eine abelsche Gruppe. Die reellen Zahlen wurden hier ja definiert als eine Menge von Äquivalenzklassen von Cauchyfolgen. Die Addition ist über Repräsentanten definiert und somit übertragen sich alle Eigenschaften und auch die reellen Zahlen bilden mit der Addition eine abelsche Gruppe.

(d)* Für $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ gilt das multiplikative Assoziativgesetz und das Distributivgesetz. Da die Operationen auf den Cauchyfolgen punktweise definiert wurden, gelten die entsprechenden Gesetze dort auch und da die Operationen auf den reellen Zahlen über Repräsentanten definiert wurden, überträgt sich das alles auf $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

Das multiplikative Neutralelement von $\mathbb{Q}$ ist die Zahl 1. Das multiplikative Neutralelement in der Menge der Cauchyfolgen ist die konstante 1-Folge, die offensichtlich eine Cauchyfolge ist. Die Klasse der konstanten 1-Folge ist dann das Neutralelement in $\mathbb{R}$.

(e) Sei $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in \mathbb{R}$ eine Äquivalenzklasse einer Cauchyfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Weiterhin nehmen wir an, dass $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] \neq [(0)_{n\in\mathbb{N}}]$, d.h. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist keine Nullfolge.

Nach der (T23d) wissen wir, dass die Folge ab einem bestimmten Index $n_0 \in \mathbb{N}$ an einen Mindestabstand ϵ zur 0 hat. Insbesondere gilt also, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nur an endlich vielen Stellen 0 werden kann.

Wenn wir die Folge an endlich vielen Stellen abändern, ändert sich die Äquivalenzklasse nicht, d.h. wenn wir

$$x'_n := \begin{cases} x_n & \text{falls } x_n \neq 0 \\ 1 & \text{falls } x_n = 0 \end{cases}$$

definieren, dann ist $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wieder eine Cauchyfolge und $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] = [(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}]$.

Aus der (T23f) folgt nun direkt, dass $\left(\frac{1}{x'_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist. Da die Multiplikation punktweise definiert ist, ist $\left[\left(\frac{1}{x'_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}\right]$ ein multiplikatives Inverses zu $\left(\frac{1}{x'_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{x'_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Aufgabe T25 (Die Anordnung auf $\mathbb{R}$)

Wir nennen eine Cauchyfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{Q}$ positiv, wenn ein $\epsilon > 0$ existiert und ein $n_o \in \mathbb{N}$, sodass $(\forall n \geq n_0) x_n \geq \epsilon$. Man überlegt sich leicht, dass dies unabhängig von der Wahl des Repräsentanten ist. Somit können wir definieren $\mathbb{R}_+ := \{[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist positiv}\}$.

(a) Zeige, dass $(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ ein angeordneter Körper ist.

(b) Überlge dir, wie man $\mathbb{Q}$ als Unterkörper von $\mathbb{R}$ auffassen kann.

(c)* Zeige, dass $(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ archimedisch angeordnet ist.

Es bleibt zu zeigen, dass $\mathbb{R}$ vollständig angordnet ist. Dazu sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge. Dann gibt es ein $s_0 \in \mathbb{Z}$ mit $s_0 \geq A$. Wir wählen s_0 minimal mit dieser

Eigenschaft. Ist $s_0 - \frac{1}{2} \geq A$, so setzen wir $s_1 := s_0 - \frac{1}{2}$, andernfalls setzen wir $s_1 := s_0$. Rekursiv setzen wir

$$\begin{aligned} s_n &:= s_{n-1} - 2^{-n} && \text{falls } s_{n-1} - 2^{-n} \geq A \\ s_n &:= s_n - 1 && \text{sonst.} \end{aligned}$$

(d) Zeige, dass $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{Q}$ ist.

(e)* Zeige, dass in $\mathbb{R}$ gilt, dass $\sup A = [(s_n)_{n\in\mathbb{N}}]$.

Lösung:

(a) Wir wissen bereits, dass $\mathbb{R}$ ein Körper ist. Es bleibt zu zeigen, dass $\mathbb{R}_+$ die Axione (O1), (O2) und (O3) erfüllt.

(O1) Sei $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in \mathbb{R}$ gegeben. Wir müssen zeigen, dass genau eine der folgenden Aussagen erfüllt ist:

$$[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in \mathbb{R}_+ \qquad [(-x_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in \mathbb{R}_+ \qquad [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] = [(0)_{n\in\mathbb{N}}]$$

1.Fall: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge. Dann gilt $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] = [(0)_{n\in\mathbb{N}}]$. Die anderen beiden Aussagen können nicht erfüllt sein, denn $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in \mathbb{R}_+$ würde ja bedeuten, dass $(\forall n \geq n_0) x_n \geq \epsilon$ für eine positives ϵ und dann kann ja die Folge keine Nullfolge sein.
2.Fall: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist keine Nullfolge. Dann gibt es nach (T23d) eine rationale Zahl $\epsilon > 0$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$(\forall n \geq n_0) x_n \geq \epsilon \text{ oder } (\forall n \geq n_0) x_n \leq -\epsilon$$

und das heißt ja nichts anderes als

$$[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in \mathbb{R}_+ \text{ oder } [(-x_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in \mathbb{R}_+$$

(O2) Seien $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in \mathbb{R}_+$ und $[(y_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in \mathbb{R}_+$ zwei positive Elemente in $\mathbb{R}$. Dann müssen wir zeigen, dass ihre Summe wieder in $\mathbb{R}_+$, also positiv ist.
Wir wissen, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ab irgendeinem Index $n_X \in \mathbb{N}$ größer/gleich einem $\epsilon_X > 0$ ist. Ebenso gilt, dass $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ab irgendeinem Index $n_Y \in \mathbb{N}$ größer/gleich einem $\epsilon_Y > 0$ ist. Deswegen ist die Summe $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ab dem Index $n_0 := \max\{n_X, n_Y\}$ größer/gleich der Zahl $\epsilon := \epsilon_X + \epsilon_Y$.

(O3) Seien $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in \mathbb{R}_+$ und $[(y_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in \mathbb{R}_+$ zwei positive Elemente in $\mathbb{R}$. Dann müssen wir zeigen, dass ihr Produkt wieder in $\mathbb{R}_+$, also positiv ist.
Wir wissen, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ab irgendeinem Index $n_X \in \mathbb{N}$ größer/gleich einem $\epsilon_X > 0$ ist. Ebenso gilt, dass $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ab irgendeinem Index $n_Y \in \mathbb{N}$ größer/gleich einem $\epsilon_Y > 0$ ist. Deswegen ist das Produkt $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ab dem Index $n_0 := \max\{n_X, n_Y\}$ größer/gleich der Zahl $\epsilon := \epsilon_X \cdot \epsilon_Y$.

Also ist $(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ ein angeordneter Körper.

(b) Jede rationale Zahl $r \in \mathbb{Q}$ kann man auffassen als die konstante Folge $(r)_{n\in\mathbb{N}} = (r, r, r, r, \ldots)$. Konstante Folgen sind konvergent und somit immer Cauchyfolgen. Die Menge aller Äquivalenzklassen von konstanten Folgen, also die Menge $\{[(r)_{n\in\mathbb{N}}] : r \in \mathbb{Q}\}$ bildet einen Unterkörper des Körpers $\mathbb{R}$.

(c)* Zeige, dass $(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ archimedisch angeordnet ist. Hierfür müssen wir zeigen, dass man für alle $[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in \mathbb{R}$ und $[(b_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in \mathbb{R}_+$ ein $k \in \mathbb{N}$ finden kann, sodass $k \cdot [(b_n)_{n\in\mathbb{N}}] > [(a_n)_{n\in\mathbb{N}}]$, d.h. dass $[(kb_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in \mathbb{R}_+$ gilt.

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge. Dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ insbesondere nach oben beschränkt. Es gibt also ein $R > 0$ mit $(\forall n \in \mathbb{N}) a_n \leq R$.
Wir wissen, dass $[(b_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in \mathbb{R}_+$ ist, d.h. es gibt ein $\epsilon_B > 0$ und ein $n_B \in \mathbb{N}$ mit

$$(\forall n \geq n_B) b_n \geq \epsilon_B.$$

Dies ist gleichbedeutend mit

$$(\forall n \geq n_B) \frac{1}{b_n} \leq \frac{1}{\epsilon_B}.$$

Wenn wie diese Informationen kombinieren, erhalten wir folgende Abschätzung:

$$(\forall n \geq n_B) \frac{a_n}{b_n} \leq \frac{R}{\epsilon_B}.$$

Da $\frac{R}{\epsilon_0} \in \mathbb{Q}$ liegt und $\mathbb{Q}$ archimedisch angeordnet ist, gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\frac{R}{\epsilon_0} \leq k$. Also gilt:

$$(\forall n \geq n_B) \frac{a_n}{b_n} \leq k.$$

oder auch:

$$(\forall n \geq n_B) a_n \leq k b_n$$

und schließlich:

$$(\forall n \geq n_B) k b_n - a_n \geq 0$$

Addieren wir nun auf beiden Seiten b_n, so erhalten wir

$$(\forall n \geq n_B)(k+1) b_n - a_n \geq b_n \geq \epsilon_B$$

Somit haben wir bewiesen, dass $[((k+1)b_n - a_n \geq b_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in \mathbb{R}_+$ liegt, also positiv ist. Das beweist, dass $(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ archimedisch angeordnet ist.

(d) Aus der Definition der Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ folgt direkt, dass $|s_n - s_{n-1}| \leq 2^{-n}$ ist. Man überlegt sich – ähnlich wie in Aufgabe (G27) – dass $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge sein muss.

(e)* Per Konstruktion gilt für alle $k \in \mathbb{N}$: $s_k \geq A$, d.h.

$$(\forall k \in \mathbb{N}, [(a_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in A)[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}] \leq [(s_k)_{n\in\mathbb{N}}]$$

Man überlegt sich leicht, dass daraus bereits folgt:

$$(\forall [(a_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in A)[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}] \leq [(s_n)_{n\in\mathbb{N}}]$$

Also ist $[(s_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ zumindest schon einmal eine obere Schranke von A.
Nun muss man nur noch die Bedingung von Lemma II.2.14 nachprüfen und ist fertig.