Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K.-H. Neeb
Dipl.-Math. Rafaël Dahmen,
Dipl.-Math. Stefan Wagner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2007
18.5.2007

5. Tutorium zur „Analysis I für M, LaG und Ph“

Aufgaben und Lösungen

Definition: Ein angeordneter Körper (K, K_+) heiße *archimedisch angeordnet*, wenn für alle $a, b \in K$ mit $b > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $nb > a$.

In der Vorlesung vom 7.5.2007 wurde der sogenannte ,,Satz von Archimedes” bewiesen, der besagt, dass jeder *vollständig* angeordneter Körper *archimedisch* angeordnet ist.

Aufgabe T15 (Archimedisch, aber nicht vollständig angeordnet)

Mache dir klar, dass $(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}_+)$ ebenfalls archimedisch angeordnet ist, obwohl $\mathbb{Q}$ nicht vollständig angeordnet ist. Dies zeigt, dass die Eigenschaft vollständig angeordnet zu sein, echt stärker ist, als die Eigenschaft archimedisch angeordnet zu sein.

Lösung: Es gibt mehrere mögliche Lösungsansätze:

1.Idee: Wenn nun $a, b \in \mathbb{Q}$ mit $b > 0$ gegeben sind, dann sind diese rationalen Zahlen a und b ja insbesondere auch reelle Zahlen. Für die reellen Zahlen wissen wir ja nach dem Satz des Archimedes (s.o.), dass sie archimedisch angeordnet sind (weil sie vollständig angeordnet sind). Also gibt es das $n \in \mathbb{N}$ mit $nb > a$. (Wir haben hier sozusagen bewiesen, dass Unterkörper von archimedisch angeordneten Körpern wieder archimedisch angeordnet sind.)

2.Idee: Seien $a, b \in \mathbb{Q}$ mit $b > 0$. Falls $a \leq 0$, so können wir $n = 1$ wählen und haben $nb = b > 0 \leq a$. Im Folgenden sei also $a > 0$. Da a und b positive rationale Zahlen sind, lassen sie sich schreiben als $a = \frac{a_1}{a_2}$ und $b = \frac{b_1}{b_2}$ mit $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{N}$. Setzen wir nun z.B. $n := a_1 \cdot b_2 + 1$, so erhalten wir:

$$n \cdot b = (a_1 \cdot b_2 + 1) \cdot \frac{b_1}{b_2} > a_1 \cdot b_2 \cdot \frac{b_1}{b_2} = a_1 \cdot b_1 \geq a_1 \geq \frac{a_1}{a_2} = a.$$

In der Vorlesung am 7.5.2007 kam die Zwischenfrage, ob es überhaupt angeordnete Körper gibt, die *nicht* archimedisch angeordnet sind. Ein solches Beispiel wollen wir nun konstruieren. Dazu benötigen wir ein Hilfsmittel, nämlich die Menge der Polynomfunktionen:

Definition: Eine Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ heiße ,,*Polynomfunktion*”, wenn es Zahlen $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n.$$

Anmerkung: Solche Funktionen werden in einigen Schulbüchern auch oft ,,ganzrationale Funktionen” genannt. Die Menge aller Polynomfunktionen werden wir mit $\mathbb{R}[x]$ bezeichnen.

Aufgabe T16 (Rechnen mit Polynomfunktionen)

(a) Zeige, dass die Summe von zwei Polynomfunktionen wieder eine Polynomfunktion ist.

(b) Mache dir klar, dass $(\mathbb{R}[x], +)$ eine abelsche Gruppe bildet. Wie sieht das Neutralelement aus?

(c) Beweise, dass das Produkt zweier Polynomfunktionen wieder eine Polynomfunktion ist.

(d) Finde das multiplikative Neutralelement.

(e) Warum ist $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ kein Körper ?

Lösung:

(a) $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n, g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^m$. Hierbei können wir o.B.d.A. annehmen, dass $n \leq m$ ist. Die Summe der beiden Polynomfunktionen ist

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= (a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) + (b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^m) \\ &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n + b_{n+1}x^{n+1} + \cdots + b_mx^m \end{aligned}$$

(b) Eine abelsche Gruppe ist eine Menge G mit einer Operation $* : G \times G \to G$, die vier Axiome erfüllt. In unserem Falle ist $G = \mathbb{R}[x]$ und $f * g := f + g$. Was man also zu allererst überprüfen muss, ist, dass die Operation $+$ nicht aus der Menge der Polynome $\mathbb{R}[x]$ hinausführt. Dies ist aber genau das, was wir in der (a) gezeigt haben. Es bleibt, die vier Axiome nachzuprüfen:

(A) Assoziativität: Der Addition von reellwertigen Funktion ist assoziativ, da die Addition in $\mathbb{R}$ assoziativ ist.

(N) Als Neutralelement nehmen wir das Nullpolynom 0. Dann gilt: $f(x)+0 = f(x) = 0+f(x)$.

(I) Jedes Element ist additiv invertierbar: Sei $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ eine beliebige Polynomfunktion. Dann setzen wir $h(x) := -f(x) = -a_0 + (-a_1)x + \cdots + (-a_n)x^n$. Dann gilt:$f(x) + h(x) = h(x) + f(x) = 0$.

(K) Die Addition von Polynomen ist kommutativ, da die Addition in $\mathbb{R}$ kommutativ ist.

(c) Sei $f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_jx^j$ und $g(x) = \sum_{k=0}^{m} b_kx^k$. Dann ist das Produkt der beiden gleich

$$\begin{aligned} f(x) \cdot g(x) &= \left(\sum_{j=0}^{n} a_jx^j\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{m} b_kx^k\right) \\ &= \sum_{k=0}^{m} \left(\sum_{j=0}^{n} a_jx^j\right) \cdot b_kx^k \\ &= \sum_{k=0}^{m} \left(\sum_{j=0}^{n} a_jx^j \cdot b_kx^k\right) \\ &= \sum_{k=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} a_jb_kx^{j+k} \end{aligned}$$

Nun ist jeder Ausdruck der Form $a_jb_kx^{j+k}$ eine Polynomfunktion und wir wissen ja, dass Summen von Polynomfunktionen wieder Polynomfunktionen sind. Also ist $f(x) \cdot g(x)$ wieder eine Polynomfunktion.

Anmerkung: Der Darstellung $\sum_{k=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} a_jb_kx^{j+k}$ kann man leider nicht gut ansehen, wie die Koeffizienten des Produktes nun aussehen. Will man dies haben, so ist es hilfreich, noch einen Index $p := j + k$ einzuführen. Da j von 0 bis n läuft und k von 0 bis m läuft, muss der neue Index dann von 0 bis $n+m$ laufen:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_j b_k x^{j+k} &= \sum_{p=0}^{n+m}\left(\sum_{j+k=p} a_j b_k\right)\cdot x^p \\ &= \sum_{p=0}^{n+m} c_p x^p\end{aligned}$$

mit $c_p = \sum_{j+k=p} a_j b_k$.
Diese Art, ein Produkt zu bestimmen, wird im Satz III.3.15 in einer allgemeineren Version für Potenzreihen wieder auftauchen.

(d) Das multiplikative Neutralelement ist das 1-Polynom, also das Polynom mit 0tem Koeffizienten gleich 1 und allen anderen gleich 0.

(e) Nicht jedes Element ist mulitplikativ invertierbar, insbesondere ist $f(x) = x$ nicht invertierbar. Beweis per Widerspruch: Angenommen $f(x) = x$ sei multiplikativ invertierbar, dann würde ein $g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^m$ existieren mit

$$\begin{aligned} x \cdot g(x) &= 1 \\ x\,(b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^m) &= 1 \\ b_0 x + b_1 x + \cdots + b_n x^{m+1} &= 1\end{aligned}$$

Dies ist absurd, denn das Polynom auf der linken Seite hat 0ten Koeffizient 0, während das Einspolynom auf der rechten Seite 0ten Koeffizienten 1 hat. Widerspruch.

Definition: Wir sagen, eine Polynomfunktion $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ habe den *Grad* n, wenn $a_n \neq 0$ ist. Die Zahl a_n heißt *Leitkoeffizient* von f. (Achtung: Diese Definition weist *nicht* jeder Polynomfunktion einen Grad und einen Leitkoeffizienten zu. Den Leitkoeffizienten von f werden wir im Folgenden mit $L(f)$ bezeichen.

Aufgabe T17 (Rechnen mit Leitkoeffizienten)

(a) Für welche Polynomfunktion sind Grad und Leitkoeffizient nicht definiert?

(b) Wie sehen Polynomfunktionen von Grad 0 aus? Wie sehen Polynomfunktionen von Grad 1 aus? (Skizze)

(c) Zeige, dass der Leitkoeffizient eines Produktes zweier Polynomfunktionen das Produkt der Leitkoeffizienten ist, d.h.

$$(\forall f, g \in \mathbb{R}[x]) L(f \cdot g) = L(f) \cdot L(g)$$

(d) Ist es ebenfalls korrekt, dass der Leitkoeffizient einer Summe zweier Polynomfunktionen die Summe der Leitkoeffizienten ist? d.h.

$$(\forall f, g \in \mathbb{R}[x]) L(f + g) = L(f) + L(g) \ ?$$

(e) Zeige folgende Implikation:

$$(\forall f, g \in \mathbb{R}[x]) \Big(L(f) > 0, L(g) > 0\Big) \Longrightarrow \Big(L(f+g) > 0\Big)$$

Lösung:

(a) Das Nullpolynom lässt sich nich schreiben als $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ mit $a_n \neq 0$, da beim Nullpolynom alle Koeffizienten 0 sind.

(b) Polynomfunktionen von Grad 0 sind konstant. Ihre Schaubilder (Graphen) sind Geraden parallel zur x-Achse. Polynomfunktionen von Grad 1: haben als Schaubilder Geraden, die nicht parallel zur x-Achse sind, sondern Steigung $a_1 \neq 0$ haben.

(c) Wenn $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ und $g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$ gegeben sind, dann ist das Produkt nach obiger Formel gegeben durch

$$\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_jb_kx^{j+k}$$

Der höchste vorkommende Exponent ist sicher $m+n$ und der Koeffizient dazu besteht aus der Summe über alle a_jb_k mit $j+k = m+n$. Also nur a_nb_m, was gerade das Produkt der Leitkoeffizienten ist.

(d) Nein, das ist nicht korrekt. Es gibt tausend Gegenbeispiele, z.B. $f(x) = x$, $g(x) = x^2$ oder ähnliches.

(e) Wir machen eine Fallunterscheidung:

- Erster Fall: Beide Polynome haben den gleichen Grad. Dann ist der Leitkoeffizient gerade die Summe der beiden positiven Zahlen, folglich positiv.
- Zweiter Fall: Beide Polynome haben unterschiedlichen Grad. Dann sieht man durch Hinschreiben, dass der neue Leitkoeffizient gerade der des Polynoms mit dem größeren Grad ist. Und der war nach Voraussetzung positiv.

Aufgabe T18 (Verhalten einer Polynomfunktion im Unendlichen)

Eine reellwertige Funktion heiße *schließlich positiv*, wenn es eine reelle Zahl $R > 0$ gibt, sodass $(\forall x > R) f(x) > 0$. Sei $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ eine Polynomfunktion mit Leitkoeffizient $L(f) = a_n$. Wir wollen zeigen, dass f „schließlich positiv" ist, wenn $a_n > 0$ ist. Dazu kann man z.B. so vorgehen:

(a) Mache dir klar, dass für alle $x > 1$ gilt:

$$\left|a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}\right| \leq \left(\sum_{j=1}^{n-1} |a_j|\right) \cdot x^{n-1}$$

(b) Zeige: Für alle $x > 1$ gilt:

$$f(x) \geq a_n \cdot x^n - C \cdot x^{n-1}.$$

Hierbei ist $C := \left(\sum_{j=1}^{n-1} |a_j|\right)$.

(c) Zeige: Für alle $x > 1$ und $x > \frac{c}{a_n}$ gilt: $f(x) > 0$.
(Also ist f schließlich positiv für $R := \max\{1, \frac{C}{a_n}\}$.)

Lösung:

(a) Nach der Dreiecksungleichung des Betrages in $\mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=0}^{n-1} a_jx^j\right| &\leq \sum_{j=0}^{n-1} |a_jx^j| \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} |a_j| \cdot |x|^j \\ &\leq \sum_{j=0}^{n-1} |a_j| \cdot |x|^{n-1}\end{aligned}$$

Hier haben wir verwendet, dass der Betrag multiplikativ ist und dass für $|x| \geq 1$ und $j \leq n-1$ die Abschätzung $|x|^j \leq |x|^{n-1}$ gilt.

(b) Wir schreiben $f(x) = a_n \cdot x^n + g(x)$. Hierbei ist $g(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$. Der Teil $g(x)$ ist der, den wir in Aufgabenteil (a) betragsmäig nach oben abgeschätzt haben. Nun nutzen wir aus, dass für jede reelle Zahl $r \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|r| = \max\{r, -r\} \geq -r$$

Also gilt insbesondere:

$$|g(x)| = \max\{g(x), -g(x)\} \geq -g(x)$$

Diese Ungleichung kann man umformen zu:

$$g(x) \geq -|g(x)| \tag{1}$$

Nun wissen wir aber nach Aufgabenteil (a), dass $|g(x)| \leq \sum_{j=0}^{n-1} |a_j| \cdot |x|^{n-1}$, was wir umformen können zu

$$-|g(x)| \geq -\sum_{j=0}^{n-1} |a_j| \cdot |x|^{n-1}$$

Nun kombinieren wir dies mit Ungleichung (1) und erhalten:

$$g(x) \geq -\sum_{j=0}^{n-1} |a_j| \cdot |x|^{n-1}$$

Und da $f(x) = a_n x^n + g(x)$ ist, gilt dann für die Funktion f:

$$f(x) = a_n x^n + g(x) \geq a_n x^n - \sum_{j=0}^{n-1} |a_j| \cdot |x|^{n-1}$$

(c) Da $x > 1$ ist, gilt nach Teil (b), dass $f(x) \geq a_n x^n - C x^{n-1}$. Nun klammern wir x^{n-1} aus und erhalten:

$$f(x) \geq x^{n-1}\left(a_n x - C\right)$$

Der ausgeklammerte Term x^{n-1} ist auf jeden Fall positiv, da $x > 1 > 0$ ist. Das Vorzeichen wird also nur durch den zweiten Term bestimmt:

$$\begin{aligned} a_n x - C > 0 \quad &\iff \quad a_n x > C \\ &\iff \quad x > \frac{C}{a_n} \end{aligned}$$

Hier verwenden wir nun endlich auch, dass $a_n > 0$ ist, denn ansonsten dürften wir die letzte Ungleichung nicht mit a_n, bzw $\frac{1}{a_n}$ multiplizieren.

Damit haben wir nun bewiesen, dass für alle $x > \max\left\{1, \frac{C}{a_n}\right\}$ der Funktionswert $f(x)$ größer 0 ist.

Definition: Wenn f und g Polynomfunktionen sind und g nicht die konstante Nullfunktion ist, dann nennen wir den Bruch $\frac{f}{g}$ eine *rationale Funktion.* (in einigen Schulbüchern werden diese Funktionen dann „gebrochen rational” genannt) Mit diesen Brüchen kann man rechnen, wie man es von den rationalen Zahlen kennt, nur dass im Zähler wie im Nenner keine ganzen Zahlen, sondern halt reelle Polynomfunktionen stehen.

Aufgabe T19 (der Körper der Rationale Funktionen)

Sei $K := \{\frac{f}{g} : f, g \in \mathbb{R}[x], g \neq 0\}$ die Menge aller rationalen Funktionen.

(a) Zeige, dass die rationalen Funktionen mit der gewöhnlichen Addition und Multiplikation einen Körper bilden.

(b) Zeige, dass $\frac{f}{g} \in K$ genau dann schließlich positiv ist, wenn $\frac{L(f)}{L(g)} > 0$ ist.

(c) Sei $K_+ := \left\{\frac{f}{g} : \frac{f}{g} \text{ ist schließlich positiv, d.h. } \frac{L(f)}{L(g)} > 0\right\}$. Zeige, dass (K, K_+) ein angeordneter Körper ist.

(d) Zeige, dass $(K, K_+$ *nicht* archimedisch angeordnet ist, nimm z.B. $a(x) = x$ und $b(x) = 1$.

Lösung:

(a) Addition: $\frac{f}{g} + \frac{F}{G} = \frac{fG+Fg}{Gg}$. Der Zähler ist eine Polynomfunktion nach Aufgabe (T16 a) und (T16 b), der Nenner ist eine Polynomfunktion nach (T16 b) und nicht das Nullpolynom, weil g und G nicht das Nullpolynom waren.

Assoziativität und Kommutativität von Addition und Multiplikation, sowie Distributivität muss man nicht explizit nachrechnen, da man ja punktweise in $\mathbb{R}$ addiert, bzw. multipliziert. Das additive Neutralelement, das Nullpolynom, lässt sich schreiben als $\frac{0}{1} \in K$ und zu jeder Funktion $\frac{f}{g} \in K$ ist auch das additive Inverse $\frac{-f}{g}$ in K.

Multiplikation: $\frac{f}{g} \cdot \frac{F}{G} = \frac{fF}{Gg}$. Der Zähler ist eine Polynomfunktion nach Aufgabe (T16 b), der Nenner ist eine Polynomfunktion nach (T16 b) und nicht null, weil g und G nicht null waren. Die 1 ist auch drin und jedes Element außer der 0 ist invertierbar, weil ein $\frac{f}{g} \neq 0$ immer impliziert, dass $f \neq 0$ ist und wir einfach Zähler und Nenner vertauschen können.

(b) „$\Longrightarrow$" Wir nehmen an, $\frac{f}{g}$ sei schließlich positiv. d.h. es gibt ein $R > 0$ mit

$$(\forall x > R)\frac{f(x)}{g(x)} > 0.$$

O.B.d.A. dürfen wir annehmen, dass der Leitkoeffizient des Nenners $L(g) > 0$ ist, da wir sonst mit (-1) erweitern und das damit erreichen. Dann gilt nach Aufgabe (T18 c), dass es ein $R' > 0$ gibt mit $(\forall x > R')g(x) > 0$. Wenn nun $x > R$ und $x > R'$, dann sind sowohl $\frac{f(x)}{g(x)}$ als auch $g(x) > 0$. Dann ist auch das Produkt der beiden, also $f(x) > 0$. Also gilt wieder nach Aufgabe (T18 c), diesmal auf f angewandt, dass $L(f) > 0$. Also gilt insbesondere $\frac{L(f)}{L(g)} > 0$.

„$\Longleftarrow$" Umgekehrt nehmen wir an, dass $\frac{L(f)}{L(g)} > 0$ ist. Wieder können wir O.B.d.A annehmen, dass $L(g) > 0$ ist und ähnlich wie oben können wir folgern, dass $L(f) > 0$ ist. Nun benutzen wir wieder Aufgabe (T18 c) und erhalten ein $R > 0$ und ein $R' > 0$, sodass $(\forall x > R)f(x) > 0$ und $(\forall x > R')g(x) > 0$. Wir setzen nun $R'' = \max\{R, R'\}$ und sehen wir, dass dann für alle $x > R''$ wirklich gilt, dass $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ ist.

(c) Wir überprüfen die Axiome eines angeordneten Körpers aus Definition II.2.1 :

(O1) Zu zeigen: Für alle $\frac{f}{g} \in K$ gilt genau eine der Aussagen

* $\frac{f}{g} \in K_+$,
* $\frac{-f}{g} \in K_+$,
* $\frac{f}{g} = 0$.

Sei $\frac{f}{g} \in K$. Erster Fall: f ist das Nullpolynom. Dann ist $\frac{f}{g} = 0$.
Zweiter Fall: Wenn nun f nicht das Nullpolynom ist, dann hat f einen Leitkoeffizienten

$L(f)$.
Fall 2a: $\frac{L(f)}{L(g)} > 0$, dann ist $\frac{f}{g} \in K_+$.
Fall 2b: $\frac{L(f)}{L(g)} < 0$, dann ist aber $\frac{L(-f)}{L(g)} > 0$ und wir haben $\frac{-f}{g} \in K_+$.
Es ist also immer einer der drei Fälle erfüllt und offensichtlich können nicht zwei davon gleichzeitig erfüllt sein.

(O2) Sei $\frac{f_1}{g_1} \in K_+$ und sei $\frac{f_2}{g_2} \in K_+$. Zu zeigen: $\frac{f_1}{g_1} + \frac{f_2}{g_2} \in K_+$. Es gibt mehrere Möglichkeiten, dies zu zeigen:

1.Möglichkeit: Wir wissen, dass $\frac{f_1}{g_1}$ und $\frac{f_2}{g_2}$ schließlich positiv sind, d.h. es gibt ein $R_1 > 0$ mit $(\forall x > R_1)\frac{f_1(x)}{g_1(x)} > 0$ und es gibt ein $R_2 > 0$ mit $(\forall x > R_2)\frac{f_2(x)}{g_2(x)} > 0$. Wenn wir nun $R := \max\{R_1, R_2\}$ setzen, dann sind für $x > R$ beide Funktionen positiv und damit auch die Summe. Also ist auch $\frac{f_1}{f_2} + \frac{f_2}{g_2}$ schließlich positiv.

2.Möglichkeit: Wir addieren die beiden Brüche und erhalten:

$$\frac{f_1}{g_1} + \frac{f_2}{g_2} = \frac{f_1 g_2 + f_2 g_1}{g_1 \cdot g_2}$$

ObdA sind die Leitkoeffizienten der beiden Nenner g_1 und g_2 positiv, dann ist auch der Leitkoeffizient der Summe $g_1 \cdot g_2$ positiv. Da aber $\frac{f_1}{g_1} \in K_+$, gilt $\frac{L(f)}{L(g)} > 0$. Also ist auch $L(f_1) > 0$. Analog für $L(f_2) > 0$. Es bleibt zu zeigen, dass der Leitkoeffizient des Zählers $f_1 g_2 + f_2 g_1$ auch positiv ist. Das folgt aber direkt aus Aufgabe (T17 c) und (T17 e).

(O3) Auch hier gibt es die beiden ähnlichen Möglichkeiten. Das geht vollkommen analog zum Nachweis von $(O2)$.

(d) Wir wollen zeigen, dass für die Wahl der Körperelement $a(x) = x$ und $b(x) = 1$, es nicht möglich ist, eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ zu finden mit $nb > a$. Um zu zeigen, dass nb niemals größer als a sein kann, untersuchen wir die Funktion $a - nb$ und zeigen, dass diese immer positiv ist, d.h. in K_+ liegt:
$a(x) - nb(x) = x - n$. Der Leitkoeffizient von $a - nb$ ist demnach $1 > 0$, somit ist $a - nb \in K_+$, d.h. $a - nb > 0$ also ist $nb < a$. Dies gilt aber für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist K nicht archimedisch.

Somit haben wir einen angeordneten Körper konstruiert, der nicht archimedisch ist.