Analysis I für M, LaG und Ph, SS 2007
Tutorium 4, Lösungsskizze

Existenz k-ter Wurzeln

Wie wir bereits gesehen haben, ist die quadratische Gleichung $x^2 - a = 0$ bei beliebig vorgegebenen positiven $a \in \mathbb{Q}$ im allgemeinen nicht durch ein $x \in \mathbb{Q}$ lösbar ist, denn $\sqrt{2}$ und allgemeiner $\sqrt{p}$ ist nicht rational für jede Primzahl $p \in \mathbb{N}$. In diesem Tutorium zeigen wir, dass Gleichungen der Form $x^k - a = 0$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ und jeden nichtnegativen reelen Wert von $a \in \mathbb{R}$ lösbar ist. An dieser Stelle benutzen wir ganz wesentlich das Vollständigkeitsaxiom, denn aus Körper- und Anordnugsaxiomen allein lässt sich die Existenz k-ter Wurzeln nicht erschließen.

Aufgaben

T 11 (Ganzzahlige Potenzen).

Sei (K, K_+) ein angeordneter Körper und $x, y \in K$ mit $0 < x < y$.
Zeige, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt $0 < x^k < y^k$. (Hinweis: Vollständige Induktion)

Induktionsanfang $n = 1$ ist trivial: Ist $0 < x < y$, so ist $0 < x^1 < y^1$.

Gelte nun $0 < x^n < y^n$. Zweimalige Anwendung von Satz II.2.4 (i) liefert dann $x^{n+1} = x^n \cdot x < x^n \cdot y < y^n \cdot y = y^{n+1}$. Weiter gilt $x^{n+1} = x^n \cdot x > 0$ nach dem Anordnungsaxiom (O3).

T 12 (Existenz k-ter Wurzeln).

Beweis den folgenden Satz:

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ und jede nichtnegative reele Zahl a existiert genau eine nichtnegative reele Zahl b mit $b^k = a$.

Gehe dabei folgendermaßen vor:

(a) Mache dir zunächst klar, dass du dich auf den Fall $a > 0$ beschränken kannst. Im folgenden sei daher $a > 0$.

(b) Betrachte nun die Menge $M := \{x \in [0, \infty[\colon x^k \le a\}$ und zeige $M \neq \emptyset$.

(c) Zeige, dass $y := \max(1, a)$ eine obere Schranke für M ist und folgere, dass $\sup M$ existiert.

(d) Sei $b \ge 0$ und

$$C := k \cdot \max\{\binom{k}{j} b^{k-j} : j = 1, ..., k\}.$$

Folgere für $0 < h < 1$ aus dem Binomischen Lehrsatz
$(b + h)^k \le b^k + hC$ und entsprechend $(b - h)^k \ge b^k - hC$.

(e) Setze $b := \sup M$. Zeige $b^k = a$, indem du die Annahme $b^k \neq a$ zu einem Widerspruch führst.
(Hinweis: Ist $b^k < a$ verwende Teilaufgabe (c) für $h := \frac{1}{2}\min(1, \frac{a-b^k}{C})$.
Ist $b^k > a$ verwende Teilaufgabe (c) für $h := \frac{1}{2}\min(1, \frac{b^k-a}{C})$.)
Hiermit ist die Existenz eines $b > 0$ mit $b^k = a$ gezeigt.

(f) Beweise nun noch die Eindeutigkeitsaussage.

(a) Für $a = 0$ wähle $b = 0$.

(b) Es ist $0 \in M$ und daher $M \neq \emptyset$.

(c) Für $x > y$ gilt nach **T11** *$x^k > y^k \geq y \geq a$ und folglich $x \notin M$. Kontraposition liefert nun $M \leq y$. Somit ist M nach oben beschränkt und besitzt daher nach dem Vollständigkeitsaxiom ein Supremum.*

(d) Aus dem Binomischen Lehrsatz folgt für $0 < h < 1$:

$$(b+h)^k = b^k + \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} b^{k-j} h^j \leq b^k + \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{k} C h^j \leq b^k + hC$$

und entsprechend

$$(b-h)^k = b^k + \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j h^j b^{k-j} \geq b^k - \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} h^j b^{k-j} \geq b^k - hC.$$

(e) Ist $b^k < a$, so erhalten wir mit obiger Abschätzung und h aus dem Hinweis

$$(b+h)^k \leq b^k + hC < b^k + a - b^k = a,$$

im Widerspruch zur Definition von b, denn $(b+h) > b$. ($b + h \in M$!)
Ist $b^k > a$, so erhalten wir mit obiger Abschätzung und h aus dem Hinweis

$$(b-h)^k \geq b^k - hC > b^k + a - b^k = a,$$

im Widerspruch zur Definition von b. ($b - h \notin M$!)

(f) Für $0 \leq b < c$ gilt nach **T11** *die Beziehung $b^k < c^k$. Also existiert genau ein $b \geq 0$ mit $b^k = a$.*

T 13 (Rationale Potenzen).

Zeige:

(a) $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall a, b \in \mathbb{R})\ \ 0 \leq a < b \Rightarrow \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

(b) Für alle $q \in \mathbb{Q}_+$ und $a, b \in \mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ mit $a < b$ ist $a^q < b^q$. Hinweis: Man betrachte zuerst den Fall $q \in \mathbb{N}$ bzw. $q \in \mathbb{Z}$ und dann den Fall $q = \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$. Schließlich setze man beides zusammen.

(a) Sei $0 < a < b$. Wäre $\sqrt[n]{a} \geq \sqrt[n]{b}$, so wäre auch $a = (\sqrt[n]{a})^n \geq (\sqrt[n]{b})^n = b$ nach **T11** *Widerspruch. Also muss doch (wie gewünscht) $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$ sein.*

(b) Wir schreiben $q \in +$ in der Form $q = \frac{k}{n}$ mit $k, n \in \mathbb{N}$. Sind $a, b \in \mathbb{R}_+$ mit $a < b$, so gilt $a^k < b^k$ nach **T11**. *Nach Aufgabenteil (a) ist folglich $a^q = \sqrt[n]{a^k} < \sqrt[n]{b^k} = b^q$.*

T 14 ($\mathbb{Q}$ ist nicht ordnungsvollständig).

Betrachte die Menge

$$M := \{x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x,\ x^2 \leq 2\}$$

und zeige, dass M beschränkt ist, aber kein Supremum in $\mathbb{Q}$ besitzt.

Es gilt $M \leq 2$. Angenommen $s := \sup M$ existiert in $\mathbb{Q}$, dann gilt einerseits $M \leq s$ und andererseits $s < \sqrt{2}$. Nach Folgerung II.2.20. aus dem Skript gibt es eine rationale Zahl r mit $s < r < \sqrt{2}$ und somit gilt $r^2 < 2$, also $r \in M$ im Widerspruch zur Definition von s. Folglich ist Q nicht ordnungsvollständig.