Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K.-H. Neeb
Dipl.-Math. Rafael Dahmen,
Dipl.-Math. Stefan Wagner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2007
3.5.2007

3. Tutorium zur „Analysis I für M, LaG und Ph“

Aufgaben und Lösungen

Hinweis: Wie in der Vorlesung auch bezeichne $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ immer die Menge der natürlichen Zahlen ohne Null, und $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ die Menge der nichtnegativen ganzen Zahlen, inklusive der Null. (Achtung: Dies kann in anderen Veranstaltungen anders sein! Manchmal ist auch die Null natürlich.)

Aufgabe T7 (Binomischer Lehrsatz)

Zeige, unter Verwendung des Binomischen Lehrsatzes, folgende Formel:

$$(\forall k \in \mathbb{Q})(\forall q \in \mathbb{N}) \quad (k+1)^q - k^q \quad = \quad \sum_{r=0}^{q-2} \binom{q}{r} k^r + qk^{q-1}. \tag{1}$$

Überprüfe insbesondere die Gültigkeit der Formel für den Fall $q = 1$.

Lösung: Der binomische Lehrsatz ist Satz I.4.9 aus der Vorlesung. Er besagt:

$$(\forall x, y \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}_0) \quad (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \cdot y^{n-k}.$$

Um den Satz anzuwenden ersetzen wir x durch k, y durch 1, n durch q und den Summationsindex k durch r. Dann steht da:

$$(k+1)^q = \sum_{r=0}^{q} \binom{q}{r} k^r.$$

Die beiden letzten Summanden dieser Summe ($\binom{q}{q-1} k^{q-1} = qk^{q-1}$) und ($\binom{q}{q} k^q = k^q$) spalten wir ab und erhalten:

$$(k+1)^q = \sum_{r=0}^{q-2} \binom{q}{r} k^r + qk^{q-1} + k^q.$$

Subtrahieren von k^q auf beiden Seiten liefert die gesuchte Gleichung.

Der Fall $q = 1$ ist ein Spezialfall, da die Summe $\sum_{r=0}^{q}$ nur zwei Summanden hat, nämlich den Fall $r = 0$ und $r = 1$. Wenn wir nun – wie oben angegeben – die letzten beiden Summanden abspalten, so bleibt nichts übrig, sozusagen die leere Summe. Die Formel bleibt also gültig, wenn wir definieren, dass $\sum_{r=0}^{-1} \cdots := 0$ ist.

Aufgabe T8 (Teleskopsumme)

Gegeben seien Zahlen $n \in \mathbb{N}_0, q \in \mathbb{N}$. Vereinfache – ohne Verwendung von Aufgabe (T7) – den folgenden Ausdruck:

$$\sum_{k=0}^{n} \Big((k+1)^q - k^q\Big).$$

Lösung:

$$\sum_{k=0}^{n} \Big((k+1)^q - k^q\Big) = \Big(1^q - 0^q\Big) + \Big(2^q - 1^q\Big) + \Big(3^q - 2^q\Big) + \cdots + \Big((n+1)^q - n^q\Big).$$

Man sieht, dass sich alle Terme wegheben, bis auf $(n+1)^q$ und auf -0^q. Letzteres ist aber gleich 0, da $q \geq 1$ ist. Demnach vereinfacht sich der Ausdruck zu $(n+1)^q$.

Anmerkung: Eine Summe dieser Art nennt man auch *Teleskopsumme*, weil sie bei obiger Rechnung erst ausgeschrieben sehr lang wird und dann – nachdem sich fast alles weghebt – sehr kurz wird.

Anmerkung: Wem dieser Beweis mit „man sieht, dass ...” nicht mathematisch genug war, kann auch die Formel $\sum_{k=0}^{n} \Big((k+1)^q - k^q\Big) = (n+1)^q$ z.B. mit vollständiger Induktion beweisen.

Aufgabe T9 (Summenformeln)

Für $p, n \in \mathbb{N}_0$ setze $S^{(p)}(n) := \sum_{k=0}^{n} k^p$. Aus der Vorlesung wissen wir bereits, dass

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0)\ S^{(1)}(n) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

In den Hausübungen des 3. Übungsblattes wird per Induktion bewiesen, dass

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0)\ S^{(2)}(n) = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

und

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0)\ S^{(3)}(n) = \frac{n^2}{4}(n+1)^2.$$

Mit vollständiger Induktion kann man allerdings nur Formeln beweisen, die man bereits formuliert hat. Damit bleibt also unklar, wie man diese Formeln findet und ob es zu jedem Exponenten p eine solche Formel gibt.

(T9 a) Sei $n \in \mathbb{N}_0, q \in \mathbb{N}$. Summiere beide Seiten der Gleichung 1 aus Aufgabe (T7) von $k = 0$ bis n und leite so folgende Formel her (unter Verwendung der (T8)):

$$(n+1)^q = \sum_{r=0}^{q-2} \binom{q}{r} S^{(r)}(n) + q \cdot S^{(q-1)}(n).$$

(T9 b) Ersetze nun q durch $p+1$ für ein $p \in \mathbb{N}_0$ und löse anschließend nach $S^{(p)}(n)$ auf. Nun müsstest du eine Formel für beliebigen Exponenten p haben, in der allerdings alle Formeln $S^{(r)}(n)$ für $r < p$ vorkommen.

Lösung:

(a) Wir wissen, dass für jedes $k \in \mathbb{Q}$, also insbesondere für jedes $k \in \{0, \ldots, n\}$ die Formel aus Aufgabe T7 gilt:

$$(\forall k = 0 \ldots n) \quad (k+1)^q - k^q = \sum_{r=0}^{q-2} \binom{q}{r} k^r + qk^{q-1}$$

Nun addieren wir alle diese Gleichungen von $k=0$ bis $k=n$ auf und erhalten:

$$\sum_{k=0}^{n}\Big((k+1)^q-k^q\Big)=\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{r=0}^{q-2}\binom{q}{r}k^r+qk^{q-1}\right)$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist – nach Aufgabe (T8) – gleich $(n+1)^q$. Die rechte Seite können wir umformen zu

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{r=0}^{q-2}\binom{q}{r}k^r+qk^{q-1}\right) &= \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{r=0}^{q-2}\binom{q}{r}k^r\right)+\sum_{k=0}^{n}\left(qk^{q-1}\right)\\ &= \sum_{r=0}^{q-2}\binom{q}{r}\sum_{k=0}^{n}k^r+q\cdot\sum_{k=0}^{n}k^{q-1}\\ &= \sum_{r=0}^{q-2}\binom{q}{r}S^{(r)}(n)+q\cdot S^{(q-1)}(n).\end{aligned}$$

Das war zu beweisen.

(T9 b) Die Substitution $q:=p-1$ ergibt

$$(n+1)^{p+1}=\sum_{r=0}^{p-1}\binom{p+1}{r}S^{(r)}(n)+(p+1)\cdot S^{(p)}(n).$$

Subtrahieren der großen Summe und anschließendes Teilen durch den Wert $(p+1)$, der ungleich 0 ist, weil $p\geq 0$ ist, ergibt schließlich:

$$S^{(p)}(n)=\frac{1}{p+1}\left((n+1)^{p+1}-\sum_{r=0}^{p-1}\binom{p+1}{r}S^{(r)}(n)\right)$$

Aufgabe T10 (noch mehr Summenformeln)

Zeige mit Hilfe von (T9 b), wie man die Formeln für $S^{(0)}(n)$, $S^{(1)}(n)$ und $S^{(2)}(n)$ findet. Falls du noch Zeit und Lust auf weitere Rechnungen hast, leite auf diesem Wege die Formeln für $S^{(3)}(n)$ und $S^{(4)}(n)$ her.

Lösung: Die Formel aus (T9 b) liefert für $p=0$:

$$S^{(0)}(n)=\frac{1}{1}\left((n+1)^{0+1}-\underbrace{\sum_{r=0}^{0-1}\binom{0+1}{r}S^{(r)}(n)}_{=0}\right)=n+1.$$

Dieselbe Formel liefert für $p=1$:

$$\begin{aligned}S^{(1)}(n) &= \frac{1}{2}\left((n+1)^2-\underbrace{\sum_{r=0}^{0}\binom{1}{r}S^{(r)}(n)}_{S^{(0)}(n)=n+1}\right)\\ &= \frac{1}{2}\Big((n+1)^2-(n+1)\Big)=\frac{n(n+1)}{2}.\end{aligned}$$

Nun der Fall $p = 2$:

$$\begin{aligned}
S^{(2)}(n) &= \frac{1}{3}\left((n+1)^3 - \sum_{r=0}^{1}\binom{3}{r}S^{(r)}(n)\right) \\
&= \frac{1}{3}\left((n+1)^3 - \binom{3}{0}S^{(0)}(n) - \binom{3}{1}S^{(1)}(n)\right) \\
&= \frac{1}{3}\left((n+1)^3 - (n+1) - 3\frac{n(n+1)}{2}\right. \\
&= \frac{1}{3}(n+1)\Big((n+1)^2 - 1 - \frac{3n}{2}\Big) \\
&= \frac{1}{3}(n+1)\Big(n^2 + 2n + 1 - 1 - \frac{3n}{2}\Big) \\
&= \frac{1}{3}(n+1)\Big(n^2 + 2n - \frac{3n}{2}\Big) \\
&= \frac{1}{3}(n+1)n\Big(n + 2 - \frac{3}{2}\Big) \\
&= \frac{1}{3}(n+1)n\frac{2n+1}{2} \\
&= \frac{1}{6}(n+1)n(2n+1).
\end{aligned}$$

Als nächstes folgt der Fall $p = 3$:

$$\begin{aligned}
S^{(3)}(n) &= \frac{1}{4}\left((n+1)^4 - \sum_{r=0}^{2}\binom{4}{r}S^{(r)}(n)\right) \\
&= \frac{1}{4}\left((n+1)^4 - \binom{4}{0}S^{(0)}(n) - \binom{4}{1}S^{(1)}(n) - \binom{4}{2}S^{(2)}(n)\right) \\
&= \frac{1}{4}\left((n+1)^4 - (n+1) - 4\cdot\frac{n(n+1)}{2} - 6\cdot\frac{1}{6}(n+1)n(2n+1)\right) \\
&= \frac{1}{4}\left((n+1)^4 - (n+1) - 2n(n+1) - (n+1)n(2n+1)\right) \\
&= \frac{1}{4}(n+1)\left((n+1)^3 - 1 - 2n - n(2n+1)\right) \\
&= \frac{1}{4}(n+1)\left((n+1)^3 - 1 - 2n - n(2n+1)\right) \\
&= \frac{1}{4}(n+1)\left(n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 1 - 2n - 2n^2 - n\right) \\
&= \frac{1}{4}(n+1)\Big(n^3 + n^2\Big) \\
&= \frac{1}{4}(n+1)n^2(n+1) \\
&= \frac{n^2}{4}(n+1)^2.
\end{aligned}$$

Schließlich folgt nun die Formel für $p = 4$:

$$\begin{aligned}
S^{(4)}(n) &= \frac{1}{5}\left((n+1)^5 - \sum_{r=0}^{3}\binom{5}{r}S^{(r)}(n)\right) \\
&= \frac{1}{5}\left((n+1)^5 - \binom{5}{0}S^{(0)}(n) - \binom{5}{1}S^{(1)}(n) - \binom{5}{2}S^{(2)}(n) - \binom{5}{3}S^{(3)}(n)\right) \\
&= \frac{1}{5}\left((n+1)^5 - (n+1) - 5\frac{n(n+1}{2} - 10\cdot\frac{1}{6}(n+1)n(2n+1) - 10\cdot\frac{n^2}{4}(n+1)^2\right) \\
&= \frac{1}{5}(n+1)\left((n+1)^4 - 1 - 5\frac{n}{2} - 10\cdot\frac{1}{6}n(2n+1) - 10\cdot\frac{n^2}{4}(n+1)\right) \\
&= \frac{1}{5}(n+1)\left(n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 - 1 - \frac{5}{2}n - \frac{10}{3}n^2 - \frac{5}{3} - \frac{5}{2}n^3 - \frac{5}{2}n^2\right) \\
&= \frac{1}{5}(n+1)\left(n^4 + \frac{3}{2}n^3 + \frac{1}{6}n^2 - \frac{1}{6}n\right) \\
&= \frac{1}{5}(n+1)\frac{1}{6}n\left(6n^3 + 9n^2 + n - 1\right) \\
&= \frac{1}{30}(n+1)n(2n+1)(3n^2+3n-1).
\end{aligned}$$