Analysis I für M, LaG und Ph, SS 2007
Tutorium 2, Lösungsskizze

Funktionen und Mächtigkeit von Mengen

Aufgaben

T 3 (Funktionen I)

(a) Ist $f : X \to \emptyset$ eine Funktion, so ist $X = \emptyset$.

(b) Für jede Menge Y ist $f = (\emptyset, Y, \emptyset)$ eine Funktion. Ihr Graph Γ_f ist die leere Menge. Man beachte, dass auch die Menge $\emptyset \times Y$ leer ist.

Dies folgt direkt aus der Definition einer Funktion.

T 4 (Funktionen II)

Im folgenden sei X eine nichtleere Menge. Zeige:

(a) Eine Funktion $f : X \to Y$ ist genau dann injektiv, wenn eine Funktion $g : Y \to X$ existiert, so dass
$$g \circ f = \mathrm{id}_X.$$

(b) Eine Funktion $f : X \to Y$ ist genau dann surjektiv, wenn eine Funktion $g : Y \to X$ existiert, so dass
$$f \circ g = \mathrm{id}_Y.$$

(c) Eine Funktion $f : X \to Y$ ist genau dann bijektiv, wenn eine Funktion $g : Y \to X$ so existiert, so dass
$$f \circ g = \mathrm{id}_Y \quad \text{und} \quad g \circ f = \mathrm{id}_X.$$

(a) *Ist $f : X \to Y$ injektiv, so definiert $g' : f(X) \to X$, $f(x) \mapsto x$ eine Funktion. Nun setzen wir $g' : f(X) \to X$ zu einer Funktion $g : Y \to X$ fort, d.h. $g \mid f(X) = g'$. Beachte hierbei, dass wir $g' : f(X) \to X$ auf viele verschiedene Weisen zu einer Funktion fortsetzen können. Nach Konstruktion gilt $g \circ f = \mathrm{id}_X$*

Gilt umgekehrt $g \circ f = \mathrm{id}_X$. für eine Funktion $g : Y \to X$, so ist f injektiv. Seien dazu $x_1, x_2 \in X$. Ist $f(x_1) = f(x_2)$, so folgt $(g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_2)$ und folglich $x_1 = \mathrm{id}_X(x_1) = \mathrm{id}_X(x_2) = x_2$.

(b) *Ist $f : X \to Y$ surjektiv, so gilt $f(X) = Y$ Wir definieren uns nun eine Funktion $g : Y \to X$, indem wir fur jedes $y \in Y$ eine Element x aus der Faser $f^{-1}(y)$ auswälen. (Die Tatsache, dass wir dies überhaupt tun können folgt aus dem sogenannten Auswahlaxiom.) Nach Konstruktion folgt wiederrum $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.*

Gilt umgekehrt $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ fur eine Funktion $g : Y \to X$, so ist f surjektiv. Sei dazu $y \in Y$ beliebig. Dann folgt $y = \mathrm{id}_Y(y) = (f \circ g)(y) = f(g(y))$. Also $y = f(x)$ mit $x = g(y) \in X$.

(c) *Dies folgt nun direkt aus den Konstruktionen aus* (a) *und* (b).

T 5 (Mächtigkeit von Mengen I)

Zur Erinnerung:

1) Eine Menge M heißt *endlich*, wenn sie leer ist oder eine $n \in \mathbb{N}$ existiert, so dass M gleichmächtig ist zu $\{1, 2, ..., n\}$, d.h., es existiert eine bijektive Abbildung

$$f : \{1, 2, ..., n\} \to M.$$

2) Eine Menge M heißt *abzählbar*, wenn sie leer ist oder eine surjektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to M$ existiert.

(a) Zeige, dass Definition 1) wohldefiniert ist.

(b) Zeige, dass jede endliche Menge abzählbar ist.

(c) Zeige, dass jede unendliche abzählbare Menge gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ ist. Zeige hierzu, dass aus der Existenz einer surjektiven Funktion $f : \mathbb{N} \to M$ die einer bijektiven Funktion $g : \mathbb{N} \to M$ folgt. Hierzu definiert man

$$h(n) := \min\{m \in \mathbb{N} : |\{f(1), ..., f(m)\}| = n\}.$$

Dann ist $h(n) \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und man kann zeigen, dass $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine injektive Funktion ist, für die $g := f \circ h : \mathbb{N} \to M$ bijektiv ist.

(a) *Seien* $n, m \in \mathbb{N}$ *und* $\varphi : \{1, 2, ..., n\} \to \{1, 2, ..., m\}$ *eine Bijektion. Wir haben zu zeigen, dass dann* $n = m$ *folgt. Da* $\varphi : \{1, 2, ..., n\} \to \{1, 2, ..., m\}$ *injektiv ist, hat das Bild von* φ *genau* n *verschiedene Elemente. Es gilt also* $n \leq m$. *Da* $\varphi : \{1, 2, ..., n\} \to \{1, 2, ..., m\}$ *andererseits surjektiv ist, existert zu jedem* $l \in \{1, 2, ..., m\}$ *mindestens ein* $k \in \{1, 2, ..., n\}$ *mit* $\varphi(k) = l$ *und folglich* $m \leq n$. *Somit erhalten wir die gewünschte Gleichheit* $n = m$.

(b) *Sei* M *eine endliche nichtleere Menge. Nach Definition existiert ein* $n \in \mathbb{N}$ *und eine bijektive Abbildung* $f : \{1, 2, ..., n\} \to M$. *Wir haben zu zeigen, dass eine surjektive Abbildung* $F : \mathbb{N} \to \{1, 2, ..., n\}$ *existiert. Definiere* $F : \mathbb{N} \to \{1, 2, ..., n\}$ *durch*

$$m \mapsto \begin{cases} m & m \leq n \\ n & m > n \end{cases}$$

(c) *Zunächst ist nach Definition* $h(n) \geq n$ *klar. Die Injektivität von* $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *ist auch einfach nachzuweisen:*

Aus $h(n) = h(m) = k$ *folgt notwendigerweise schon* $n = m$. *Es verbleibt die Bijektivität von* $g := f \circ h : \mathbb{N} \to M$ *nachzuweisen:*

Sei dazu $g(n) = (f \circ h)(n) = (f \circ h)(m) = g(m)$. *Gilt* $h(m) = h(n)$, *so folgt wegen der Injektivität von* $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *sofort* $n = m$. *Wir können im folgenden also O.B.d.A.* $h(m) = l > k = h(n)$ *annehmen. Aufgrund der Definition von* $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *und wegen* $f(k) = f(l)$ *folgt nun ein Widerspruch zur Minimalität* *von l, so dass $h(m) \leq l - 1$. Eine Fortfürung dieser Prozedur liefert nun $l = k$, also $n = m$. Dies zeigt, dass $g := f \circ h : \mathbb{N} \to M$ injektiv ist.*

Um nachzuweisen, dass $g := f \circ h : \mathbb{N} \to M$ auch surjektiv ist, sei $x \in M$. Wir müssen nun ein $n \in \mathbb{N}$ finden, so dass $g(n) = x$ ist. Dazu betrachten wir die Zahl $m := min\{k \in \mathbb{N} : k \in f^{-1}(x)\}$. Ist nun $|\{f(1), ..., f(m-1)\}| = l$, so gilt $h(l+1) = m$ und folglich $g := (f \circ h)(l+1) = f(m) = x$. Damit ist gezeigt, dass $g := f \circ h : \mathbb{N} \to M$ surjektiv ist.

T 6 (Mächtigkeit von Mengen II)

Beweise Satz I.3.13 aus der Vorlesung: Die Mengen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sind gleichmätig.

Gehe dabei follgendermaßen vor:

(a) Zeige, dass für die Mengen

$$M_n := \{(1, n), (2, n-1), ..., (n-1, 2), (n, 1)\}, \quad n = 1, 2, ...$$

$M_n \cap M_m = \emptyset$ falls $n \neq m$, sowie $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \cup_{n \in \mathbb{N}} M_n$ gilt.
(Man sagt, dass $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ die *disjunkte* Vereingung der Teilmengen M_n ist.)

(b) Zeige nun, dass die Funktion f die Mengen M_n bijektiv auf

$$N_n := \{\frac{n(n-1)}{2} + 1, \frac{n(n-1)}{2} + 2, ..., \frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}\}$$

abbildet.

(c) Zeige weiter, dass $\mathbb{N}$ die disjunkte Vereinigung der Teilmengen N_n ist. Es ist hilfreich sich $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ als rechteckige Tabelle von Paaren (p, q) vorzustellen, und jedem Paar seine Platznummer zu zuordenen.

Dies zeigt nun, dass die Menge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ nicht wirklich größer als $\mathbb{N}$ ist.

(a) $M_n \cap M_m = \emptyset$ falls $n \neq m$ ist leicht einzusehen. Klar ist auch, dass $\cup_{n \in \mathbb{N}} M_n \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ gilt. Ist andererseits $(n, m) \in \mathbb{N}$, dann gilt $(n, m) \in M_{m+n-1}$ und somit $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \cup_{n \in \mathbb{N}} M_n$.

(b) Die verifiziert man durch einfaches einsetzen.

(c) *Die Inklusion $N_n \subseteq \mathbb{N}$ ist trivial. Umgekehrt gibt es zu jedem $m \in \mathbb{N}$ ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $\frac{n(n-1)}{2} + 1 \leq m \leq \frac{n(n+1)}{2}$ gilt, d.h. $m \in N_n$. Folglich gilt $\mathbb{N} = \cup_{n \in \mathbb{N}} N_n$. Um zu zeigen, dass die Mengen N_n disjunkt sind, genügt es einzusehen, dass aus $n < m$ schon $\frac{n(n+1)}{2} < \frac{n(n-1)}{2} + 1$ folgt.*