Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K.-H. Neeb
Dipl.-Math. Rafael Dahmen,
Dipl.-Math. Stefan Wagner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2007
19.4.2007

1. Tutorium zur „Analysis I für M, LaG und Ph“

Aufgaben und Lösungen

Aufgabe T1 (Logische Operatoren)

Zu zwei gegebenen logischen Aussagen p und q definieren wir den logischen Operator $p \mid q$ (genannt den *Sheffer-Strich* durch folgende Wahrheitstafel:

p	q	$p \mid q$
W	W	F
W	F	W
F	W	W
F	F	W

a) Drücke den Sheffer-Strich durch die bereits bekannten logischen Operatoren aus. Beschreibe die Bedeutung in deinen eigenen Worten.

b) Stelle die logischen Operatoren $\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow$ nur mit Hilfe des Sheffer-Striches dar.

c) Stelle die logischen Konstanten **W** und **F** mit Hilfe des Sheffer-Striches dar, d.h. finde Formeln, die immer wahr, bzw. immer falsch sind und nur aus dem Buchstaben p und dem Sheffer-Strich bestehen (und sehr(!) vielen Klammern natürlich).

d) Ist es möglich, die logischen Operatoren $\neg, \vee, \wedge, |, \mathbf{W}$ nur mit Hilfe des Implikationspfeiles $\Rightarrow$ und der falschen Aussage **F** darzustellen?

Lösung:

a) $p \mid q \Leftrightarrow \neg(p \wedge q)$

b)

$$\begin{aligned}
\neg p &\Leftrightarrow p \mid p \\
p \vee q &\Leftrightarrow \neg\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg\,(\neg p \wedge \neg q) \Leftrightarrow (\neg p) \mid (\neg q) \Leftrightarrow (p \mid p) \mid (q \mid q) \\
p \wedge q &\Leftrightarrow \neg\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg(p \mid q) \Leftrightarrow (p \mid q) \mid (p \mid q) \\
p \Rightarrow q &\Leftrightarrow (\neg p) \vee q \Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q) \Leftrightarrow p \mid (\neg q) \Leftrightarrow p \mid (q \mid q)
\end{aligned}$$

c) Eine Formel, die immer wahr ist, lautet z.B. $p \Rightarrow p$, weil jede Aussage p sich selbst impliziert. Für das Implikationszeichen $\Rightarrow$ setzen wir die in Aufgabenteil (b) gefundene Umschreibung mit dem Sheffer-Strich ein und erhalten:

$$p \mid (p \mid p).$$

Eine Formel, die immer falsch ist, erhalten wir aus der Negation der vorherigen, also $\neg\left((p \mid (p \mid p))\right)$. Aus Aufgabenteil (b) wissen wir, dass man die Negation einer Aussage erhält, indem man die Aussage mit sich selbst *sheffer*t, somit erhalten wir also folgende Umschreibung für die falsche Aussage **F**:

$$((p \mid (p \mid p))) \mid ((p \mid (p \mid p)))\,.$$

d) Ja, da sich der Sheffer-Strich $p \mid q$ bereits als $p \Rightarrow (q \Rightarrow \mathbf{F})$ umschreiben lässt und wir in Aufgabenteil (b) ja bereits die anderen logischen Operatoren auf den Sheffer-Strich zurückgeführt haben.

Aufgabe T2 (Die symmetrische Differenz)

Die *symmetrische Differenz* zweier Mengen A und B, bezeichnet durch $A \triangle B$, ist definiert durch

$$A \triangle B := (A \backslash B) \cup (B \backslash A).$$

a) Veranschauliche dir an einem geeigneten Diagramm (ohne exakten Beweis), dass für zwei Mengen A und B gilt:

$$A \triangle B = (A \cup B) \backslash (A \cap B).$$

b) Veranschauliche dir an einem geeigneten Diagramm (ohne exakten Beweis), dass die symmetrische Differenz assoziativ ist, d.h. dass für alle Mengen A, B, C gilt:

$$A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C.$$

c) Veranschauliche dir an einem geeigneten Diagramm (ohne exakten Beweis), dass der Durchschnitt distributiv über der symmetrische Differenz ist, d.h. dass für alle Mengen A, B, C gilt:

$$A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C).$$

d) Definiere einen logischen Operator $\oplus$, sodass für Mengen A und B die symmetrische Differenz gerade durch

$$A \triangle B = \{x : (x \in A) \oplus (x \in B)\}$$

gegeben ist:

p	q	$p \oplus q$
W	W	
W	F	
F	W	
F	F	

(dieser Operator wird oft mit *„XOR"* oder *„Exklusives Oder"* bezeichnet.)

e) Beweise die Assoziativität von $\oplus$ mit einer Wahrheitstafel. Folgt hieraus die Assoziativität des Mengenoperators $\triangle$?

Lösung:

d)

p	q	$p \oplus q$
W	W	F
W	F	W
F	W	W
F	F	F

e)

p	q	r	$p \oplus q$	$q \oplus r$	$(p \oplus q) \oplus r$	$p \oplus (q \oplus r)$
W	W	W	F	F	W	W
W	W	F	F	W	F	F
W	F	W	W	W	F	F
W	F	F	W	F	W	W
F	W	W	W	F	F	F
F	W	F	W	W	W	W
F	F	W	F	W	W	W
F	F	F	F	F	F	F

Um die Assoziativität von $\triangle$ zu folgern, wählen wir uns ein beliebiges x. Dann gilt – nach Konstruktion des Operators:

$$\begin{aligned}
& x \in A \triangle (B \triangle C) \\
\iff\ & x \in A \oplus (x \in (B \triangle C)) \\
\iff\ & x \in A \oplus (x \in B \oplus x \in C) \\
\iff\ & (x \in A \oplus x \in B) \oplus x \in C \\
\iff\ & (x \in A \triangle B) \oplus x \in C) \\
\iff\ & x \in (A \triangle B) \triangle C
\end{aligned}$$

Somit haben wir gezeigt, dass $A \triangle (B \triangle C)$ und $(A \triangle B) \triangle C$ die gleichen Elemente haben, folglich sind sie gleich. Also ist $\triangle$ assoziativ.