Fachbereich Mathematik
AG 5: Funktionalanalysis
Prof. Dr. K.-H. Neeb
Dipl.-Math. Rafael Dahmen
Dipl.-Math. Stefan Wagner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2007 19. Juni 2007

Aufgaben und Lösungen der Probeklausur zur Analysis I

Aufgabe 1 (Aussagenlogik – 10 Punkte).

Gegeben sei folgende Aussage

$$(\forall z \in \mathbb{C})(\exists a \in \mathbb{C})\Big(a \neq z \text{ und } (\forall b \in \mathbb{C}) ab \neq 1\Big).$$

(a) Schreiben Sie die Aussage in Worten auf.

(b) Bilden Sie die Negation der Aussage.

(c) Entscheiden Sie, ob die Aussage wahr oder falsch ist, indem Sie entweder die Aussage oder ihre Negation beweisen.

Lösung Aufgabe 1

(a) „Für jede komplexe Zahl z lässt sich eine komplexe Zahl a finden, die von z verschieden ist und niemals 1 ergibt, wenn man sie mit anderen komplexen Zahlen b multipliziert."

(b)
$$(\exists z \in \mathbb{C})(\forall a \in \mathbb{C})\Big(a = z \text{ oder } (\exists b \in \mathbb{C}) ab = 1\Big)$$

„Es existiert eine komplexe Zahl z, sodass jede komplexe Zahl a entweder gleich z ist oder multiplikativ invertierbar ist."

(c) Setze $z := 0$. Weil $\mathbb{C}$ ein Körper ist, gilt für jede komplexe Zahl $a \in \mathbb{C}$, dass entweder $a = 0$ ist oder das Inverse von a existiert. Somit ist die Negation der Aussage bewiesen und die Aussage somit falsch.

Aufgabe 2 (Grenzwerte konkreter Folgen – 10 Punkte).

Untersuchen Sie die jeweilige komplexe Zahlenfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Beschränktheit, Konvergenz, Divergenz und bestimmte Divergenz.

(a) $x_n = \frac{(100n+1)^2}{25(n^2+n+1)}$

(b) $x_n = i^n + (-1)^n$

(c) $x_n = (\frac{3+4i}{5})^n$

(d) $x_n = \frac{n!}{2^n}$

Lösung Aufgabe 2

(a) $x_n = \frac{(100n+1)^2}{25(n^2+n+1)} = \frac{10000n^2+\cdots}{25n^2+\cdots} \to 400$ für $n\to\infty$ (siehe die Behandlung rationaler Folgen in Skript und Übung). Als konvergente Folge ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ insbesondere beschränkt.

(b) Wegen $|x_n| = |i^n + (-1)^n| \leq |i|^n + |-1|^n = 2$ ist die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Da $x_{4n} = 2 \to 2$ für $n\to\infty$, jedoch $x_{4n+2} = -1+1 = 0 \to 0$ für $n\to\infty$, hat die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Teilfolgen mit unterschiedlichen Limites und kann daher nicht konvergieren. Sie ist somit divergent und beschränkt.

(c) Da $|x_{n+1} - x_n| = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ keine Nullfolge ist, kann $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht konvergieren. Die Folge ist somit divergent und beschränkt, da $|x_n| = 1$ für $n\in\mathbb{N}$.

(d) Für $n\geq 2$ ist $0 < x_n = \frac{n!}{2^n} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot 1}{2^n} \geq 3^{n-2}\cdot 2\cdot 1 \frac{2^n}{=} 2\cdot(\frac{3}{2})^{n-2}$. Da $2\cdot(\frac{3}{2})^{n-2} \to \infty$ (vgl. "geometrische Folge"), divergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt gegen ∞ und ist deshalb insbesondere unbeschränkt.

Aufgabe 3 (Konvergenz von Reihen – 10 Punkte). Entscheiden Sie bei jeder der folgenden Reihen, ob sie konvergiert:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{n}\right)^9$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n+9}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{9n}\right)^n$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ mit $x_1 := 42$ und $x_{n+1} := \frac{3n+9}{9n+1}x_n$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^n}$

Lösung Aufgabe 3

(a)

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{n}\right)^9 &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^9}{n^9}\\ &= 3^9\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^9}.\end{aligned}$$

Diese Reihe konvergiert nach Folgerung III.4.4, weil $9>1$ ist.

(b) Diese Reihe divergiert, da die Folge $\left(\sqrt{n+9}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge ist, sondern gegen ∞ divergiert.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{9n}\right)^n$. Wir wenden das Wurzelkriterium an:

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{\left|\left(\frac{n+1}{9n}\right)^n\right|} &= \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{9n}\right)^n}\\ &= \frac{n+1}{9n}\\ &= \frac{1}{9}+\frac{1}{9n}.\end{aligned}$$

Diese Folge konvergiert gegen $\frac{1}{9}<1$. Somit konvergiert die Originalreihe nach dem Wurzelkriterium.

(d) Wir wenden das Quotientenkriterium an:

$$\begin{aligned}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| &= \left|\frac{\frac{3n+9}{9n+1}x_n}{x_n}\right|\\ &= \left|\frac{3n+9}{9n+1}\right|\\ &= \frac{3+\frac{9}{n}}{9+\frac{1}{n}}\end{aligned}$$

Dies konvergiert nun gegen $\frac{3}{9}=\frac{1}{3}<1$. Also konvergiert die Reihe nach dem Quotientenkriterium.

(e) Hier gibt es viele Möglichkeiten, dies zu beweisen: Es bieten sich folgende Kriterien an: Leibnitz-Kriterium, Quotientenkriterium, Wurzelkriterium.

Als Beispiel für eine mögliche Lösung wenden wir einmal das Wurzelkriterium an:

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{\left|(-1)^n \frac{1}{n^n}\right|} &= \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} \\ &= \sqrt[n]{\left(\frac{1}{n}\right)^n} \\ &= \frac{1}{n}\end{aligned}$$

Diese Folge konvergiert gegen $0 < 1$. Somit konvergiert die Originalreihe nach dem Wurzelkriterium.

Aufgabe 4 (Metrische Räume – 10 Punkte).

(a) Sei X eine Menge und $f\colon X \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir definieren eine Funktion

$$d\colon X \times X \to [0,\infty[, \qquad d(x,y) := |f(x) - f(y)|.$$

Welche Eigenschaften muss f haben, damit d eine Metrik ist?

(b) Es sei (X,d) ein metrischer Raum. Weiterhin seinen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in X mit $x_n \to x$ und $y_n \to y$ für $x,y \in X$. Zeigen Sie, dass dann der Abstand der Grenzwerte gleich dem Grenzwert der Abstände der Folgenglieder ist, d.h. es gilt

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n) = d(x,y).$$

Lösung Aufgabe 4

(a) f muss notwendig injektiv sein, denn ist d eine Metrik und sind $x \neq y$ aus X, so muss $|f(x) - f(y)| = d(x,y) \neq 0$ sein und somit $f(x) \neq f(y)$.

Diese Bedingung ist auch hinreichend. Sei nämlich f injektiv. Für $x \neq y$ in X ist dann $f(x) \neq f(y)$ und somit $d(x,y) = |f(x) - f(y)| \neq 0$. Weiter ist $d(x,x) = |f(x) - f(x)| = 0$.

Symmetrie: $d(y,x) = |f(y) - f(x)| = |f(x) - f(y)| = d(x,y)$.

Dreiecksungleichung: Für alle $x,y,z \in X$ gilt

$$\begin{aligned} d(x,z) &= |f(x) - f(z)| = |f(x) - f(y) + f(y) - f(z)| \\ &\leq |f(x) - f(y)| + |f(y) - f(z)| = d(x,y) + d(y,z). \end{aligned}$$

(b) Zweimaliges Anwenden der Dreiecksungleichung liefert

$$(x,y) \leq d(x,y_n) + d(y_n,y) \leq d(x,x_n) + d(x_n,y_n) + d(y_n,y)$$

und folglich

$$|d(x,y) - d(x_n,y_n)| \leq d(x,x_n) + d(y,y_n).$$

Für $n \to \infty$ konvergiert nun die rechte Seite der Gleichung gegen 0 und somit gilt auch

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n) = d(x,y).$$

Aufgabe 5 (Rekursive Folgen und Induktion – 10 Punkte).

Die reelle Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch $y_1 := 0,\ y_{n+1} := \left(\frac{y_n}{2}\right)^2 + 1$

(a) Zeigen Sie, dass die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend ist.

(b) Nehmen Sie zusätzlich an, die Folge sei konvergent. Finden Sie den Grenzwert L.

(c) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion (ohne anzunehmen, dass $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert), dass die Folge nach oben beschränkt wird durch L.

(d) Warum folgt daraus nun die Konvergenz von $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen L?

Lösung Aufgabe 5

(a)

$$\begin{aligned} y_{n+1} - y_n &= \left(\left(\frac{y_n}{2}\right)^2 + 1\right) - y_n \\ &= \frac{y_n^2}{4} + 1 - y_n \\ &= \frac{y_n^2 + 4 - 4y_n}{4} \\ &= \frac{y_n^2 - 2\cdot 2y_n + 2^2}{4} \\ &= \frac{(y_n - 2)^2}{4} \geq \frac{0}{4} = 0 \end{aligned}$$

Also gilt $y_{n+1} - y_n \geq 0$, d.h. $y_{n+1} \geq y_n$. Also ist $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend.

(b) Angenommen $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere gegen eine Zahl L. Dann konvergiert natürlich auch $(y_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen L, da dies ja nur eine Indexverschiebung ist. Nun nehmen wir die definierende Gleichung

$$y_{n+1} = \left(\frac{y_n}{2}\right)^2 + 1$$

und bilden auf beiden Seiten den Grenzwert für $n \to \infty$. Die linke Seite ist einfach L. Die rechte Seite konvergiert nach den Grenzwertsätzen(Satz III.2.13) gegen $\left(\frac{L}{2}\right)^2 + 1$. Das ergibt uns die folgende Gleichung in L:

$$L = \left(\frac{L}{2}\right)^2 + 1$$

Diese lässt sich nun nach L auflösen:

$$\begin{aligned} L &= \left(\frac{L}{2}\right)^2 + 1 \\ 0 &= \left(\left(\frac{L}{2}\right)^2 + 1\right) - L \\ 0 &= \frac{L^2}{4} + 1 - L \\ 0 &= \frac{L^2 + 4 - 4L}{4} \\ 0 &= \frac{L^2 - 2\cdot 2L + 2^2}{4} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{(L-2)^2}{4} \\
0 &= (L-2)^2
\end{aligned}
$$

Also ist $L=2$ die einzige Lösung. Wir haben also gezeigt: Falls $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, dann gegen 2.

(c) Wir zeigen mit vollständiger Induktion:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) y_n \leq 2$$

Induktionsanfang: $n=1$: $y_1 = 1 \leq 2$.

Induktionsschritt: Angenommen $y_n \leq 2$. Dann gilt für y_{n+1}:

$$
\begin{aligned}
y_{n+1} &= \left(\frac{y_n}{2}\right)^2 + 1 \\
&\leq \left(\frac{2}{2}\right)^2 + 1 \\
&\leq (1)^2 + 1 = 2.
\end{aligned}
$$

Somit gilt die Behauptung auch für $n+1$ und nach dem Prinzip der vollständigen Induktion somit für alle $n \in \mathbb{N}$.

(d) Wir haben in (a) gezeigt, dass die Folge monoton wächst und in (c), dass die Folge nach oben beschränkt ist. Nach dem Satz von der monotonen Konvergenz(Satz III.2.19) folgt daraus, dass $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tatsächlich konvergiert. Dass $L=2$ dann der Grenzwert sein muss, haben wir ja schon in der Teilaufgabe (b) gezeigt.