Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K.-H. Neeb
Dipl.-Math. Rafael Dahmen,
Dipl.-Math. Stefan Wagner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2007
18.7.2007

# 14. Übungsblatt zur „Analysis I für M, LaG und Ph“

## Gruppenübung

**Aufgabe G47** (Komplexe Zahlenebene)

Zeichne die folgenden Zahlen in die komplexe Zahlenebene ein:

(a) $z_1 := e^{i\pi}$

(b) $z_2 := e^{i\cdot\frac{-\pi}{2}}$

(c) $z_3 := 4 \cdot e^{i\cdot\frac{2\pi}{6}}$

(d) $z_4 := 3 \cdot e^{i\cdot\frac{5}{8}\cdot 2\pi}$

(e) $z_5 := \sqrt{2} \cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{4}}$

(f) $z_6 := e^{i}$

(g) $z_7 := e^{-2}$

(Hinweis: Diese Aufgabe hat gewisse Ähnlichkeiten mit der Aufgabe (T42) vom letzten Tutoriumsblatt. Wer diese Aufgabe dort gut bearbeitet hat, kann diese hier überspringen. Zusätzlicher Hinweis zur (f): Der Winkel 1 im Bogenmaß entspricht $\left(\frac{360}{2\pi}\right)^\circ \approx 57.2957795^\circ$ im Gradmaß, da $1^\circ := \frac{2\pi}{360}$ ein 360tel des Vollkreises ist.)

**Aufgabe G48** (Sinus und Cosinus)

(a) Zeige mit den Additionstheoremen die folgenden Formeln:

$$\begin{aligned}(\forall x \in \mathbb{R}) \sin(2x) &= 2\sin x \cos x \\ (\forall x \in \mathbb{R}) \cos(2x) &= 2(\cos x)^2 - 1\end{aligned}$$

(b) Berechne mit geschicktem Kombinieren der beiden Formeln „$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$” und „$(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$” die Werte von $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ und $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$. Was ist $e^{i\frac{\pi}{4}}$?

**Aufgabe G49** (Sinc-Funktion)

Der *Kardinalsinus* ist eine Funktion, die folgendermaßen definiert ist:

$$\mathrm{sinc} : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{falls } x \neq 0 \\ 1 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

(a) Zeige, dass die Funktion differenzierbar ist und berechne die Ableitung.

(b) Finde die Nullstellen der Funktion sinc und berechne die Grenzwerte $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{sinc}(x)$ und $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{sinc}(x)$.

(c) Skizziere grob den Graphen der Funktion sinc. (Eine Kurvendiskussion inklusive Extremwertberechnung wird schwierig und ist deshalb nicht gefordert.)

# Hausübung

(Wer bearbeitete Aufgaben abgeben will, kann dies bis zum 1.August bei Rafael Dahmen(414), Stefan Wagner(423) oder im Sekretariat der AG5 (K414) tun.)

**Aufgabe H52** (Polardarstellung)
Seien $z_1 := 2i$ und $z_2 := -\frac{4}{\sqrt{2}} + i\frac{4}{\sqrt{2}}$.

a) Bestimme die Polardarstellungen von $z_1$ und $z_2$.

b) Bestimme unter Verwendung der Ergebnisse aus a) die Polardarstellungen von $z_3 = z_1 z_2$ und $z_4 = \frac{z_1}{z_2}$.
Hinweis: Benutze die Schreibweise mit der Exponentialfunktion.

c) Gib $z_3$ und $z_4$ in der Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ an.

d) Zeichne $z_1, z_2, z_3$ und $z_4$ in eine komplexe Ebene ein und interpretiere die Multiplikation mit $z_2$ und die Division mit $z_2$ geometrisch.

**Aufgabe H53** (Umkehrfunktion)
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x - \sin x$. Zeige: $f$ ist bijektiv und hat eine stetige Umkehrfunktion $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Gib alle $y \in \mathbb{R}$ an, an denen $f^{-1}$ differenzierbar ist.

**Aufgabe H54** (Kurvendiskussion)
Gegeben sei die Funktion $R : ]0, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R} : t \mapsto \frac{\log(t)}{t}$.

(a) Finde die Nullstellen der Funktion $R$ und berechne $\lim_{t \searrow 0} R(t)$ und $\lim_{t \to +\infty} R(t)$.

(b) Untersuche die Funktion $R$ auf Monotonie und Extremstrellen.

(c) Was ist das Bild der Funktion? Ist sie surjektiv?

(d) Skizziere den Graphen der Funktion.

(e) Zeige: Wenn zwei unterschiedliche Zahlen $s < t$ auf den gleichen Wert $R(s) = R(t)$ abgebildet werden, dann ist $1 < s < e < t$.

(f) Zeige den folgenden zahlentheoretischen Satz: Wenn für zwei natürliche Zahlen $k, l \in \mathbb{N}$ gilt, dass $k^l = l^k$ ist, dann sind entweder beide gleich oder eine ist 2 und die andere 4.

**Aufgabe H55** (Logarithmen)
Wir erinnern an die Definition: $(\forall a > 0, x \in \mathbb{R}) a^x := \exp(x \cdot \log(a))$.

(a) Für welche $a > 0$ ist die Funktion $\exp_a : \mathbb{R} \longrightarrow ]0, +\infty[ : x \mapsto a^x$ bijektiv? Gib die Umkehrfunktion an.

(b) Die Umkehrfunktion auf Aufgabenteil (a) nennt man den Logarithmus zur Basis $a$ und schreibt:
$$\log_a := (\exp_a)^{-1} : ]0, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}.$$
Für welchen Wert $a$ ist $\log_a = \log$ ?

(c) Zeige für alle $a, b, x > 0, a, b \neq 1$ die Formel: $\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$. (Das bedeutet: Wenn man den Logarithmus zu einer bestimmten Basis $b$ berechnen kann, so kann man Logarithmen zu beliebigen Basen darstellen. (Deswegen konnte man früher z.B. auch nur mit einer Logarithmentafel zur Basis 10 natürliche Logarithmen berechnen.))

(d) Sei $a, r, s \in \mathbb{R}, a > 0, s > 1$. Berechne die Ableitungen der folgenden Funktionen:
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad &: \quad x \mapsto a^x \\ g : ]0, +\infty[ \to \mathbb{R} \quad &: \quad x \mapsto x^r \\ h : ]0, +\infty[ \to \mathbb{R} \quad &: \quad x \mapsto \log_s(x) \\ l : ]1, +\infty[ \to \mathbb{R} \quad &: \quad x \mapsto \log_x(s) \end{aligned}$$

**Aufgabe H56** (komplexe Exponentialfunktion)
Sei $z \in \mathbb{C}$. Beweise die folgende Formel:

$$|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$$

**Aufgabe H57** (L'Hospital-Regel)
Sei (nochmals) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x - \sin x$. Wenn ich den Grenzwert $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ berechnen will, darf ich dann die L'Hospital-Regel anweden und folgern, dass

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - \cos x}{1} = \text{divergent?}$$

Falls Nein: Warum darf ich die Regel nicht anwenden?

**Aufgabe H58** (Reihenkonvergenz)

(a) Für welche $r \in \mathbb{R}$ konvergiert die folgende Reihe? $\sum_{k=1}^{\infty} k! r^k$

(b) Für welche $s \in \mathbb{R}$ konvergiert die folgende Reihe? $\sum_{l=1}^{\infty} e^{-2l} s^l$

(c) Für welche $t \in \mathbb{R}$ konvergiert die folgende Reihe? $\sum_{m=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{3}{2} \cdot \log(m)\right) \cdot t^m$

(d) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die folgende Reihe? $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n \cdot x)}{n^2}$

**Aufgabe H59** (Funktionenfolge)
Sei $D := ]0, +\infty[$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die folgende Funktion gegeben:

$$f_n : D \longrightarrow \mathbb{R} : t \mapsto \exp\Big(-t - n\exp(-t)\Big).$$

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$ fest. Bestimme $\lim_{t \to +\infty} f_n(t)$ und $\lim_{t \searrow 0} f_n(t)$.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$ fest. Für welche $t \in ]0, +\infty[$ ist die Ableitung $f_n'(t)$ positiv, für welche Werte ist die Ableitung negativ?

(c) Finde alle Extremstellen der Funktion $f_n(t)$ (in Abhängingkeit von $n$).

(d) Berechne $\|f_n\|_D$.

(e) Zeige, dass die Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen die konstante 0-Funktion konvergiert.

**Aufgabe H60** (die Mathematik ist widerlegt)
Schlechte Neuigkeiten: Herr X. hat seine populäre Mathematik-Website (siehe G32 und H21) geschlossen. Grund dafür war nicht die Temperatur seines Tees (siehe G35), sondern die Tatsache, dass es ihm inzwischen gelang, die Mathematik zu widerlegen und er so keinen Sinn mehr darin sah, mathematisch interessierte Besucher für die Mathematik zu begeistern. Dieser Beweis geht so:

$$\begin{aligned}
e^{2\pi i} &= 1 && \Big| \text{ Multipliziere mit } e. \\
e^{2\pi i + 1} &= e && \Big| \text{ Potenziere mit } 2\pi i. \\
\left(e^{2\pi i + 1}\right)^{2\pi i} &= e^{2\pi i} \\
e^{(2\pi i + 1) \cdot 2\pi i} &= e^{2\pi i} \\
e^{(2\pi i)^2 + 2\pi i} &= e^{2\pi i} \\
e^{4\pi^2(-1)} \cdot e^{2\pi i} &= e^{2\pi i} \\
e^{-4\pi^2} &= 1
\end{aligned}$$

Die linke Seite der Gleichung ist eine reelle Zahl kleiner 1, weil der Exponent reell und kleiner 0 ist. Die rechte Seite ist gleich 1, folglich ist die Mathematik widerlegt.