Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K.-H. Neeb
Dipl.-Math. Rafael Dahmen
Dipl.-Math. Stefan Wagner

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

11. Juli 2007

Analysis I für M, LaG und Ph, SS 2007, Übung 13

Gruppenübung

G 43 (Lokale Extrema).

Für die folgenden Funktionen bestimme die lokalen Extremwerte sowie deren Typen.

(a) $f(x) = 2x^4 - 8x^2$ auf $D = [-1, 2]$

(b) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ auf $D = [0, 5]$

G 44 (Extremwertaufgaben).

(a) Gegeben sei ein Quader mit den Kantenlängen a, b und c. Wie muss der Punkt P gewählt werden, damit der Polygonzug OPQ die kürzeste auf der Oberfläche des Quaders gelegene Verbindung von O und Q darstellt?

(b) Welchen Weg muss der Rettungsschwimmer R einschlagen, um möglichst schnell zu der in Not geratenen Strandschönheit E zu gelangen, wenn er fünfmal so schnell läuft, wie er schwimmt? Gesucht ist eine Gleichung für die Winkel beim Übergang vom Land zum Wasser.

G 45 (Regeln von de l'Hospital).

Finde die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}$; (b) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$; (c) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos\frac{x}{2}}{1-\cos x}$; (d) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^2}$.

G 46 (Eine nützliche glatte Funktion).

Zeige, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{für } x > 0; \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

beliebig oft differenzierbar ist, und $f^{[n]}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

[Hinweis: Zeige per Induktion nach $n \in \mathbb{N}$, dass f eine C^n-Funktion ist und es eine Polynomfunktion $p_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt derart, dass $f^{[n]}(x) = p_n(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x}}$ für alle $x > 0$.]

Hausübung

H 49 (Wendepunkte).

Die *Wendepunkte* einer zweimal differenzierbaren Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien definiert als die Nullstellen von f'' an denen ein Vorzeichenwechsel vorliegt.

Die *Van der Waalssche Zustandgleichung für reale Gase* lautet

$$(p + \frac{a}{V^2})(V - b) = RT$$

Dabei bezeichnet p den Druck, V das Volumen, T die absolute Temperatur, R die allgemeine Gaskonstante und a, b Stoffkonstanten. Wir wollen p in Abhängigkeit von V studieren, d.h. wir lösen nach p auf und fassen V als unabhängige Variable auf:

$$p = f_T(V) = \frac{RT}{V - b} - \frac{a}{V^2}.$$

Der Index T deutet an, dass die Funktion f_T von T abhängt.

Das Gas läßt sich nur für Temperaturen T, die unterhalb einer *kritischen Temperatur* T_k liegen, durch steigenden Druck verflüssigen. Für $T > T_k$ bleibt das Gas auch unter beliebig hohem Druck gasförmig. Die kritische Temperatur T_k ist mathematisch dadurch bestimmt, dass die zugehörige Funktion p einen Wendepunkt mit waagrechter Tangente besitzt. (s. Gerthsen, Physik, 5.6.4, zum physikalischen Hintergrund). Der Wendepunkt V_k wird *kritisches Volumen* genannt, der zugehörige Wert $p_k = f_{T_k}(V_k)$ *kritischer Druck*.

Bestimme T_k, V_k und p_k.

H 50 (Regeln von de l'Hospital).

Finde die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{e^x - 1}$;

(b) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha}$ sowie $\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha}$ mit $\alpha, \beta > 0$;

(c) $\lim_{x\searrow 0} x^\alpha \ln x$ mit $\alpha > 0$;

(d) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

H 51 (Weitere nützliche Funktionen). Es sei $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wie in **G48**.

(a) Zeige, dass f monoton wächst und bestimme $\lim_{x\to\infty} f(x)$ und $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. Skizziere f grob.

(b) Zeige, dass die glatte Funktion $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) := -f(1 - 2f(x))$ monoton wächst. Zeige außerdem, dass reelle Zahlen $r < R$ existieren, so dass $f(x) = m$ für $x < r$ und $f(x) = M$ für $x > R$. Skizziere g grob.

(c) Bastle aus g eine glatte Funktion $h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit analogen Eigenschaften, jedoch mit $m = 0$ und $M = 1$.

(d) Skizziere eine glatte Funktion $k \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften: Es existieren $a < b < c < d$ derart, dass $k(x) = 0$ gilt falls $x < a$ oder $x > d$, $k(x) = 1$ ist für alle $x \in [b, c]$, die Einschränkung $k|_{[a,b]}$ monoton wächst und $k|_{[c,d]}$ monoton fällt. Bastele mit Hilfe von h eine solche Funktion k.

Bem.: Man nennt eine solche Funktion k eine "Abschneidefunktion" oder auch "cut-off."