Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K.-H. Neeb
Dipl.-Math. Rafael Dahmen,
Dipl.-Math. Stefan Wagner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2007
4.7.2007

12. Übungsblatt zur „Analysis I für M, LaG und Ph“

Gruppenübung

Aufgabe G40 (Ableitungsregeln)

Bestimme mit Hilfe der Rechenregeln für das Differenzieren die Ableitungen folgender Funktionen:

(a) $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^5 + 3x^2 - 42$

(b) $f_b : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$

(c) $f_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \log(x^2 + 2x + 2)$

(d) $f_d :]0, +\infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto \log(x^{23}) - 23\log(x) + 12$

(e) $f_e : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$

(f) $f_f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto a^x,$ wobei $a > 0$ gegeben ist und $a^x := \exp(x \cdot \log a)$

(g) $f_g :]0, +\infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto x^x,$ wobei $x^x := \exp(x \cdot \log x)$

Aufgabe G41 (Ableitung mit Differenzenquotient)

Gegeben seien folgende Funktionen:

(a) $g_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$

(b) $g_b : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 2x+1 & \text{falls } x > 0 \\ (x+1)^2 & \text{sonst} \end{cases}$

(c) $g_c : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x \cdot \sqrt[n]{|x|}$ mit $n \in \mathbb{N}$

Zeige direkt mit der Definition V.1.2, dass die Funktionen an der Stelle 0 differenzierbar ist und berechne die Ableitung an dieser Stelle.

Aufgabe G42 (Gleichmäßige Konvergenz)

(a) Zeige: Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} : t \mapsto e^{t-n}$ konvergiert punktweise, aber nicht gleichmäßig.

(b) Zeige: Die Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $g_n : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} : t \mapsto e^{-(t+n)}$ konvergiert gleichmäßig, Bestimme von jedem g_n die Supremumsnorm.

(c) Zeige: Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$ konvergiert gleichmäßig. Gib die Grenzfunktion explizit an.

Hausübung

Aufgabe H45 (Differenzenquotienten)

Zeige mit Definition V.1.2, dass die folgenden Funktionen nicht differenzierbar sind:

(a) $f_a :]-2,2[\longrightarrow \mathbb{R} : t \mapsto |t+1|$

(b) $f_b :]-2,2[\longrightarrow \mathbb{R} : t \mapsto \sqrt{|t-1|}$

(c) $f_c :]-2,2[\longrightarrow \mathbb{R} : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } t = 0 \\ \frac{t}{|t|} & \text{sonst} \end{cases}$

(d) $f_d :]-2,2[\longrightarrow \mathbb{R} : t \mapsto \begin{cases} t^3 & \text{falls } t \geq 1 \\ t & \text{sonst} \end{cases}$

(e) $f_e : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt[n]{|x|}$ mit $n \in \mathbb{N}$

Aufgabe H46 (Konvergenzradius)

Bestimme den Konvergenzradius folgender Potenzreihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^n$$

Aufgabe H47 (Nicht explizit hinschreibbare Umkehrfunktion)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x + x^5 - 3$. Zeige, dass f bijektiv ist und dass $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist. Was ist die Ableitung von f^{-1} an der Stelle -3 ?

Aufgabe H48 (Sekanten- und Tangentensteigung)

(a) Sei $a < c$ und $f : [a,c] \longrightarrow \mathbb{R} : t \mapsto t^2$. Gib ein $b \in]a,c[$ an mit

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} = f'(b)$$

(b) Tue das gleiche für $f : [a,c] \longrightarrow \mathbb{R} : t \mapsto \frac{1}{t}$ mit $0 < a < c$.

Orientierungskolloquium

Die Forschungsgebiete des Fachbereichs Mathematik stellen sich vor.

Montag, 09.07.2007 – 16:15-17:15 Uhr – S214/024

Prof. Dr. **Karl-Hermann Neeb**

FG Algebra, Geometrie und Funktionalanalysis

„Differenzierbare Gruppen: Ein Konzept an der Schnittstelle von Algebra, Geometrie und Funktionalanalysis "

Nach dem Vortrag gibt es ein gemütliches Treffen in S215/219, um über den Vortrag zu reden und den Vortragenden näher kennenzulernen.