Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K.-H. Neeb
Dipl.-Math. Rafael Dahmen
Dipl.-Math. Stefan Wagner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

24. Juni 2007

Analysis I für M, LaG und Ph, SS 2007, Übung 11

Gruppenübung

G 35 (Zum Aufwärmen).

(a) Die Funktion $f : [-1, 1]\backslash 0 \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ ist stetig und es gilt $f(-1) = -1$ sowie $f(1) = 1$. Allerdings nimmt f nicht den Wert 0 an. Ist dies ein Widerspruch zum Zwischenwertsatz?

(b) Herr X bereitet sich nach seiner Analysis I Vorlesung einen frischen Tee zu, stürzt ihn gierig herunter und verbrennt sich hierbei heftig den Mund. Frustriert wartet er eine halbe Stunde ab und muss feststellen, dass der Tee kalt und langweilig geworden ist. War der Tee zu irgendeiner Zeit genießbar?

G 36 (Ein praktisches Maximierungsproblem).

Entfernt man aus einem kreisförmigen Stück Papier ein Kreissegment der Bogenlänge α, $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, so entsteht durch zusammenfügen der Schnittkanten ein Kegel. Begründe, dass für ein geeignetes $\alpha \in [0, 2\pi]$ das Volumen des entstehenden Kegels maximal wird.

G 37 (Stetige Funktionen).

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit der Eigenschaft, dass $f(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ eine rationale Zahl ist. Zeige, dass in diesem Fall f konstant ist.

G 38 (Gleichmässige Stetigkeit).

Zeige, dass die Funktion $x \mapsto \sqrt{x}$ gleichmässig stetig auf $[0, 1]$ und auf $[0, +\infty[$ ist.

G 39 (Punktweise Konvergenz vs. gleichmäßige Konvergenz).

Wir betrachten die stetigen Funktionen $f_n \colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) := \sqrt[n]{x}$ für $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeige, dass für jedes $x \in [0, 1]$ der Grenzwert $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ existiert, und berechnen Sie ihn. Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert also punktweise gegen f.

(b) Ist die Grenzfunktion f stetig ?

(c) Konvergiert die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f ?

Hausübung

H 41 (Eine weitere Eigenschaft stetiger Funktionen).

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ stetig im Punkt $p \in D$ mit $f(p) \neq 0$. Dann ist $f(x) \neq 0$ für alle x in einer Umgebung von p, d.h. es existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$f(x) \neq 0 \text{ für alle } x \in D \text{ mit } |x - p| < \delta.$$

H 42 (Satz über die Umkehrfunktion).

Betrachte die stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$. Bestimme $f(\mathbb{R})$, begründe die Existenz einer Umkehrfunktion $f^{-1} : f(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ und gib diese explizit an.

H 43 (Punktweise und gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen).

Untersuche die jeweilige Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$ auf punktweise sowie auf gleichmäßige Konvergenz. Berechne gegebenenfalls die Grenzfunktion f.

(a) $f_n(x) := \frac{x}{1+nx}$;

(b) $f_n(x) := \frac{1}{1+nx}$.

H 44 (Punktweise und gleichmäßige Konvergenz von Funktionenreihen).

Die Funktionenreihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ mit $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x}{(1+x^2)^n}$ konvergiert punktweise gegen eine Grenzfunktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(a) Berechne $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n}$ für $x \in \mathbb{R}$.

(b) Ist die Konvergenz gleichmäßig ?