Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K.-H. Neeb
Dipl.-Math. Rafael Dahmen,
Dipl.-Math. Stefan Wagner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
Sommersemester 2007
20.7.2007

10. Übungsblatt zur „Analysis I für M, LaG und Ph"

Gruppenübung

Aufgabe G31 (Epsilon-Delta-Stetigkeit)
Sei $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[: x \mapsto \sqrt{x}$ die Wurzelfunktion. Zeige direkt mit der Definition IV.1.1., dass f an der Stelle $p = 0$ stetig ist. (Anmerkung: f ist natürlich überall stetig, aber für jetzt soll uns einmal $p = 0$ genügen.)

Aufgabe G32 (Herr X. Fortsetzung)
Herr X. erklärt auf seiner populären Mathe-Website (weltbekannt aus Aufgabe (H21)) auch, was stetige Funktionen sind. Als Beispiel für eine nicht-stetige Funktion gibt er die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ an, weil ihr Graph aus zwei nichtverbundenen Teilstücken besteht und sich nicht zeichnen lässt, ohne den Stift vom Papier zu nehmen.
Stimmt diese Auffassung mit unserer Definition von Stetigkeit überein?

Aufgabe G33 (noch mehr Epsilon-Delta-Stetigkeit)
Sei $\mathrm{Re} : \mathbb{C} \to \mathbb{R} : z \mapsto \mathrm{Re}(z)$ die Funktion, die jeder komplexen Zahl ihren Realteil zuweist. Zeige direkt mit der Definition IV.1.1., dass $\mathrm{Re} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ stetig ist.
(Hinweis1: Es gilt: $(\forall z, w \in \mathbb{C})\mathrm{Re}(z + w) = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(w)$.)
(Hinweis2: Benutze Ungleichung (H23 a).)

Aufgabe G34 (Konvergenzradius einer Potenzreihe)
Finde den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + 5}{n + 4} \cdot z^n$$

(Hinweis: Benutze das Quotientenkriterium.)

[bitte wenden]

Hausübung

Aufgabe H37 (Unstetigkeit)
Die charakteristische Funktion des Intervalls $[3,4]$ ist definiert als:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto\begin{cases}1 & \text{falls } x\in[3,4],\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

Zeige mit Hilfe des Folgenkriteriums für Stetigkeit (Satz IV.1.3), dass die Funktion f an den Stellen 3 und 4 nicht stetig ist.

Aufgabe H38 (die Exponentialfunktion)
Im Satz III.4.18 wurde die Exponentialfunktion $\exp:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ mit Hilfe einer Reihe *definiert*.

(a) Zeige nur mit Hilfe dieses Satzes, dass $(\forall k\in\mathbb{N}, z\in\mathbb{C})\,\exp(kz)=(\exp(z))^k$.

(b) Zeige, dass dies sogar für alle $k\in\mathbb{Z}$ gilt.

Achtung: „$\exp(kz)=e^{kz}=(e^z)^k=(\exp(z))^k$" ist noch kein Beweis!

Aufgabe H39 (Epsilon-Delta-Stetigkeit)
Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto x^2$. Zeige direkt mit Definition IV.1.1, dass diese Funktion an der Stelle $p=1$ stetig ist. (Hinweis: Setze $\delta:=\min\{\frac{\varepsilon}{3},1\}$.)

Aufgabe H40 (Stetigkeit und Offene Mengen)
Zeige nur mit Hilfe von Satz IV.1.4, dass die Funktion f aus Aufgabe (H37) nicht stetig sein kann, indem du eine offene Menge $U\subseteq\mathbb{R}$ findest, deren Urbild unter f nicht offen ist.