Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K.-H. Neeb
Dipl.-Math. Rafael Dahmen
Dipl.-Math. Stefan Wagner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

13. Juni 2007

Analysis I für M, LaG und Ph, SS 2007, Übung 9

Gruppenübung

G 28 (Konvergenz konkreter Beispiele von Reihen).

Welche der folgenden Reihen sind beschränkt, konvergent bzw. absolut konvergent ?

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n;$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-2)^n;$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+2}{2n^2};$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+1}{3^n+5}.$

G 29 (Test).

Trage die Implikationspfeile $\Rightarrow$,$\Leftarrow$,$\Leftrightarrow$ zwischen den Feldern ein.
Begründe deine Wahl!

$\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ genügt Quotientenkriterium}}$

$\boxed{\text{Die Partialsummen } \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \text{ sind beschränkt}}$

$\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert absolut}}$

$\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert}}$

$\boxed{\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0}$

$\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \text{ konvergiert}}$

$\boxed{\displaystyle\sum_{k=n}^{m} a_k \text{ genügt Cauchykriterium}}$

G 30 (Wo steckt der Fehler?).

Prüfe den folgenden Beweis.

Behauptung: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ konvergiert.

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n = 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ konvergiert. Dann gilt:

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0+0+0+\ldots = (1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots = 1-1+1-1+1-\ldots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n.$$

Hausübung

H 33 (Konvergenz von Reihen).

Überprüfe die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ auf Konvergenz für:

$$a_n = \frac{n^2 + 2n}{7n^2 + 3n + 1} \quad \text{und} \quad b_n = \frac{i^n}{n}$$

Hinweis: Eine Reihe komplexer Zahlen konvergiert genau dann, wenn sowohl ihr Realteil als auch Imaginärteil konvergiert.

H 34 (Weitere Konvergenzkriterien).

Untersuche die Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz. Ist das vorgeschlagene Kriterium anwendbar?

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ (Leibnizkriterium ?);

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1 + (\tfrac{1}{2})^n)$ (Leibnizkriterium ?);

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 + n + 1}{2n^2 + 3}\right)^n$ (Wurzelkriterium ?);

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{\sqrt{n!}}$ (Quotientenkriterium ?).

H 35 (Minorantenkriterium).

Beweise das folgende Divergenz-Kriterium durch Zurückführen auf Bekanntes:

Es sei $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ eine positive Reihe. Gibt es eine divergente, positive Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ derart, dass $a_n \le c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ divergent.

Welche Information erhält man damit im Falle einer Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ mit beliebigen komplexen Koeffizienten, wenn $a_n \le |c_n|$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ wie zuvor?

H 36 (Zusatzaufgabe).

Diese Aufgabe hat einen hohen Schwierigkeitsgrad und muss daher nicht bearbeitet werden. Allerdings wird die beste (Teil-) Lösung dieses Problems mit einer Riesentafel Schokolade belohnt. Abgabeschluss dieser Aufgabe ist der 29. Juni 2007.

Von einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ sei bekannt:

$$a_0 = 1 \text{ und } a_{n+1} = a_n + \sqrt{a_{n+1} + a_n} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zeige, dass nur eine einzige Folge mit diesen Eigenschaften existiert, und gebe eine explizite Formel für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an.

Am Dienstag, den 19. Juni 2007, 18.00-20.00 Uhr findet in S 103/221 eine freiwillige

Probeklausur zur Analysis I

statt.
Zugelassene Hilfsmittel sind 4 vorgeschriebene DIN A4 Seiten (2 Blätter!).
Wir empfehlen allen die Teilnahme zur Übung und Selbstkontrolle!

Nicht vergessen!

Hochschulwahlen

11. - 14. Juni von 11.30 - 14 Uhr

Mensa

Lichtbildausweis und Studienausweis sind alles, was du brauchst!