Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K.-H. Neeb
Dipl.-Math. Rafael Dahmen,
Dipl.-Math. Stefan Wagner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2007
6.6.2007

8. Übungsblatt zur „Analysis I für M, LaG und Ph"

Gruppenübung

Aufgabe G24 (Geometrische Reihen)

Überprüfe, welche der folgenden Reihen konvergieren und berechne gegebenenfalls ihre Summe

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sqrt{3}\right)^n$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} 13 \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}i\right)^n$

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(2^{-n} + \frac{4^n}{3^{2n}}\right)$

(e) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{42}\right)^{10-n}$

Aufgabe G25 (eine Teleskop-Summe)

Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$a_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}.$$

Untersuche die Konvergenz der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Hinweis: Was ist die n-te Partialsumme der Reihe?

Aufgabe G26 (Summe)

Zeige:

$$(\forall m, n \in \mathbb{N}) m < n \Longrightarrow \sum_{j=m}^{n-1} 2^{-j} < 2^{-(m-1)}.$$

Aufgabe G27 (Cauchy-Folgen)

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem metrischen Raum (X, d) mit der Eigenschaft, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$d(x_n, x_{n+1}) < 2^{-n}.$$

(a) Zeige für alle $n \in \mathbb{N}$: $d(x_n, x_{n+2}) < 2^{-n} + 2^{-(n+1)}$.

(b) Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$d(x_n, x_{n+k}) < 2^{-n} + 2^{-(n+1)} + \cdots + 2^{-(n+k-1)}$$

gilt.

(c) Zeige, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in (X, d) ist. (Hinweis: Nutze Aufgabe (G26).)

Hausübung

Aufgabe H29 (Konvergenz und Divergenz von Reihen)

Entscheide, welche der folgenden Reihen konvergiert. Es ist nicht erforderlich, den eventuell existierenden Grenzwert anzugeben.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} n!$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{3n^2+42n+1}{23(n+1)^2}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(2^{-n}+\frac{(-1)^n}{2n}\right)$

(f) $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{7}{n}$

Aufgabe H30 (Endliche Geometrische Reihe)

Sei K ein beliebiger Körper. Seien $a, b \in K$ zwei Körperelemente und $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Zeige folgende Formel:

$$b^{n+1}-a^{n+1}=(b-a)\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$$

Hinweis: Du kannst dich am Beweis des Satzes III.3.3(a) orientieren.

Aufgabe H31 (das Cauchy-Produkt)

Es seien $a, b \in \mathbb{C}$ mit $a \neq b$ und $|a|, |b| < 1$.

(a) Berechne das Cauchy-Produkt der geometrischen Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b^n$, d.h. finde die Summanden dieser Reihe. (Hinweis: Nutze die Formel aus Aufgabe (H30).)

(b) Berechne den Grenzwert der Reihe aus (a). Zeige, dass das Produkt der Grenzwerte der beiden geometrischen Reihen gleich dem Grenzwert ihres Cauchy-Produkts ist.

Aufgabe H32 (Näherungslösungen für Alternierende Reihen)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge nichtnegativer reeller Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Setze $b_n := (-1)^{n+1}a_n$. Sei $m \in \mathbb{N}$ eine *gerade* Zahl.

(a) Zeige: $\sum_{n=m+1}^{\infty} b_n \geq 0$

(b) Zeige: $\sum_{n=m+1}^{\infty} b_n \leq a_{m+1}$

(c) Zeige, dass der Abstand zwischen der endlichen Summe $\sum_{n=1}^{m} b_n$ und der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ kleiner gleich a_{m+1} ist.

(d) Gegeben sei die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{10^n+n}$, deren Grenzwert man nicht exakt elementar berechnen kann. Wenn man nun nur sechs Summanden der unendlichen Reihe aufaddiert und die restlichen vernachlässigt, dann ist das Ergebnis nicht exakt, sondern nur eine Näherung. Zeige, dass der Fehler (die Differenz zum exakten Ergebnis) kleiner als 10^{-7} ist.