Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K.-H. Neeb
Dipl.-Math. Rafael Dahmen
Dipl.-Math. Stefan Wagner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

30.Mai 2007

Analysis I für M, LaG und Ph, SS 2007, Übung 7

Gruppenübung

G 20 (Rekursive Folge).

Definiere die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv durch $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{2}a_n$. Zeige, dass diese Folge konvergiert und bestimme den Grenzwert. s

G 21 (Grenzwert arithmetischer Mittel).

Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge reeller Zahlen, mit Grenzwert $x := \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Zeige, dass für

$$y_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$$

,

die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls gegen x konvergiert, d.h. $\lim_{n\to\infty} y_n = x$. Hinweis: es ist

$$\Big|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k - x\Big| = \Big|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x\Big| = \Big|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - x)\Big|.$$

Gegeben $\varepsilon > 0$, spalte die Summe rechts geschickt in zwei Anteile auf.

G 22 (Häufungspunkte, Limes superior und Limes inferior).

Bestimme alle Häufungspunkte der gegebenen reellen Zahlenfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sowie ihren Limes superior und Limes interior.

(a) $x_n = (-1)^n \frac{1}{n}$;

(b) $x_n = (-1)^n$;

(c) $x_n := \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ 1 + 2\cdot(-1)^{\frac{n}{2}} & \text{falls } n \text{ gerade.} \end{cases}$

G 23 (Häufungspunkte und Teilfolgen).

(a) Finde eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen, welche $\{1,2,3,4,5\}$ als Häufungspunkte hat. Gebe eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ an, die gegen 5 konvergiert (d.h. gebe $n_1 < n_2 < \cdots$ explizit an).

(b) Finde eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen, welche alle natürlichen Zahlen als Häufungspunkte hat.

(c) Finde eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen, die (mindestens) alle rationalen Zahlen als Häufungspunkte hat.

Hausübung

H 25 (Nullfolgen).

Es sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge komplexer Zahlen und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, d.h. $z_n \to 0$. Zeige, dass dann auch $(b_n z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

H 26 (Satz von Bolzano-Weierstraß im Komplexen).

Zeige, dass jede beschränkte Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen eine konvergente Teilfolge besitzt.

H 27 (Limes superior und Limes inferior).

(a) Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen. Zeige, dass

$$\liminf x_n \ \leq \ \limsup x_n$$

(wobei $\liminf = \underline{\lim}$ den Limes inferior meint, $\limsup = \overline{\lim}$ den Limes superior).

(b) Gilt für beliebige beschränkte Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ stets

$$\limsup\,(x_n + y_n) \ = \ \limsup x_n \ + \ \limsup y_n\,?$$

H 28 (Limes superior und Limes inferior).

Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen und

$$s \ := \ \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup\,\{x_m \colon m \geq n\}\,.$$

(a) Zeige, dass $s = \limsup x_n$.

(b) Sei $s_n := \sup\,\{x_m \colon m \geq n\}$. Zeige, dass die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und nach unten beschränkt ist. Folgere, dass

$$\limsup x_n \ = \ \lim_{n\to\infty} s_n\,.$$

Es gilt also $\limsup x_n \ = \ \lim\limits_{n\to\infty} \sup\,\{x_m \colon m \geq n\}$.