Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K.-H. Neeb
Dipl.-Math. Rafael Dahmen,
Dipl.-Math. Stefan Wagner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2007
23.5.2007

6. Übungsblatt zur „Analysis I für M, LaG und Ph“

Gruppenübung

Aufgabe G17 (Folgen)

Bestimme, welche der untenstehenden Folgen konvergiert und finde in diesem Fall den Grenzwert.

1. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{1000} + \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
2. $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$
3. $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{4n^3+n+1}{3n^3+5n^2+2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
4. $(d_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\binom{5}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
5. $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{(3-n)^4}{3n^3-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
6. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{2n^2+3}{n^4+1} + \frac{1}{23^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
7. $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{2+(-1)^n}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
8. $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\left(-\frac{1}{42}\right)^{2n+3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Hinweis: Die Klammer in der Definition der Folge $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ steht für den Binomialkoeffizienten.

Aufgabe G18 (eine äquivalente Formulierung für Konvergenz)

Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Zeige folgende Äquivalenz:

$$\left(\lim_{n\to\infty} a_n = p\right) \iff \left((\forall m \in \mathbb{N})(\exists N_m \in \mathbb{N})(\forall n \geq N_m) d(a_n, p) < \frac{1}{m}\right)$$

Aufgabe G19 (ein Kriterium für Suprema)

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge der reellen Zahlen und sei $s \in \mathbb{R}$ eine obere Schranke für A. Zeige, dass s genau dann das Supremum von A ist, wenn es eine reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, die nur aus Elementen aus A besteht und gegen s konvergiert.

Hausübung

Aufgabe H21 (eine *nicht* äquivalente Formulierung für Konvergenz in $\mathbb{R}$)
Herr X. erklärt auf seiner privaten Website mathematisch interessierten Besuchern den Begriff „Grenzwert" folgendermaßen:

> *„Wenn eine Folge einer Zahl in jedem Schritt näher kommt ohne diese Zahl jemals zu erreichen, so nennt man diese Zahl den Grenzwert der Folge."*

Warum ist diese „Definition" von Herrn X. *nicht* äquivalent zu unserer Definition eines Grenzwertes aus der Vorlesung? Gib ein Beispiel einer Folge an, die nach der Definition von Herrn X. die Zahl 0 als Grenzwert haben würde, aber nicht nach unserer Definition, sowie ein Beispiel für den umgekehrten Fall. Hinweis: Beispiele für Folgen sind in der Aufgabe (G17).

Aufgabe H22 (Anwendung der Grenzwertsätze)
Gegeben seien komplexe Zahlenfolgen $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Sei $\mu \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl.

(a) Wenn die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, dann konvergiert auch $(c_n + \mu)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) Wenn die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert und $\mu \neq 0$, dann divergiert auch $\mu \cdot c_n$.

(c) Wenn die Folge $(c_n + d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert, dann ist $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent oder $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.

(d) Wenn die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert, dann divergiert auch die Summe $(c_n + d_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(e) Wenn die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, dann konvergiert $(c_{n+1} - c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0.

(f) Wenn die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert und $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen eine von Null verschiedene Zahl konvergiert, dann divergiert die Produktfolge $(c_n d_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(g) Wenn die Folge $(n \cdot c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, dann konvergiert auch die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Hinweis: Um zu zeigen, dass eine Folge divergiert, bietet sich ein Widerspruchsbeweis an, d.h. man nimmt an, sie konvergiert und führt dies zum Widerspruch.

Aufgabe H23 (Konvergenzkriterium für komplexe Zahlenfolgen)

(a) Sei $z = x+iy$ eine komplexe Zahl mit Realteil x und Imaginärteil y. Zeige die Ungleichungen: $|x| \leq |z|$ und $|y| \leq |z|$.

(b) Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n + iy_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ und sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl, $x, y \in \mathbb{R}$. Zeige, dass die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann gegen z konvergiert, wenn

$$x_n \longrightarrow x \text{ und } y_n \longrightarrow y.$$

Aufgabe H24 (die rationalen Zahlen liegen dicht)
Zeige, dass es zu jeder reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ eine Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, die nur aus Elementen aus $\mathbb{Q}$ besteht und gegen a konvergiert. (Hinweis: dies ist eine Folgerung einer Folgerung des Satzes von Archimedes)