Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K.-H. Neeb
Dipl.-Math. Rafael Dahmen
Dipl.-Math. Stefan Wagner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

16. Mai 2006

Analysis I für M, LaG und Ph, SS 2007, Übung 5

Gruppenübung

G 14 (Ungleichungen).

Es sei (K, K_+) ein angeordneter Körper.

(a) Zeige, dass für $2 := 1 + 1$ die Beziehung $1 > \frac{1}{2} > 0$ gilt.

(b) Zeige die sogenannte "Ungleichung vom arithmetischen Mittel":

$$(\forall x, y \in K) \quad x < y \quad \Rightarrow \quad x < \frac{x+y}{2} < y\,.$$

G 15 (Suprema und Maxima).

Es sei (K, K_+) ein angeordneter Körper. Eine Funktion $f\colon K \to K$ heißt *monoton wachsend*, wenn

$$(\forall a, b \in K) \quad a \leq b \quad \Rightarrow \quad f(a) \leq f(b)\,.$$

(a) Zeige: Ist K vollständig angeordnet und $f\colon K \to K$ monoton wachsend, so gilt für jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge $A \subseteq K$ mit $\sup(A) < \infty$, dass $f(A)$ nach oben beschränkt ist und

$$\sup\, f(A) \;\leq\; f(\sup\, A)\,. \tag{1}$$

(b) Zeige, dass in (1) Gleichheit gilt, wenn A ein Maximum $\max(A)$ besitzt.

(c) Finde eine monoton wachsende Funktion $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ derart, dass $\sup\, f(A) < f(\sup\, A)$ für eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{Q}$, beispielsweise für $A :=]-\infty, 0[$.

G 16 (Beispiele von Metriken).

(a) Es sei X eine Menge. Zeigen, dass die Abbildung

$$d\colon X \times X \to [0, \infty[\,, \quad d(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y; \\ 1 & \text{falls } x \neq y \end{cases}$$

eine Metrik auf X ist.

(b) (Manhattan-Metrik). Zeige, dass

$$d_1\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to [0, \infty[\,, \qquad d_1((x,y),(x',y')) := |x - x'| + |y - y'|$$

eine Metrik auf $\mathbb{R}^2$ ist. Was bedeutet der so definierte Abstand geometrisch? (Skizze!)

Hausübung

H 16 ($\mathbb{Q}$ ist nicht ordnungsvollständig).

Betrachte die Menge

$$M := \{x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x,\, x^2 \leq 2\}$$

und zeige, dass M beschränkt ist, aber kein Supremum in $\mathbb{Q}$ besitzt.

H 17 (Die Parallelogrammidentität).

Seien $z, w \in \mathbb{C}$. Zeige:

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2.$$

Deute diese Gleichung geometrisch.

H 18 (Die französische Eisenbahnmetrik).

Sei X eine Menge und $f : X \to]0, \infty[$ eine Funktion. Zeige: Durch

$$d(x, y) := \begin{cases} f(x) + f(y) & \text{für } x \neq y \\ 0 & \text{für } x = y \end{cases}$$

wird eine Metrik auf X definiert.

Zeige dann: Nimmt man zusätzlich noch einen Punkt P hinzu und setzt $d(P, P) = 0$ sowie $d(x, P) = d(P, x) = f(x)$ für alle $x \in X$, so erhält man eine Metrik auf $X' := X \cup P$.

Die Metrik auf $X \cup P$ wird französische Eisenbahnmetrik genannt. Hierbei spielt P die Rolle von Paris und $f(x)$ ist die Entfernung von Paris. Um von x nach y zu kommen, muss man den Umweg um P nehmen, so dass sich als Entfernung $f(x) + f(y)$ ergibt.

H 19 (Abgeschlossene Mengen).

(a) Zeigen Sie, dass in einem metrischen Raum (X, d) jede der Mengen

$$\overline{B}_r(p) := \{x \in X : d(x, p) \leq r\}, p \in X, r \in \mathbb{R},$$

abgeschlossen ist.

(b) Wir betrachten nun den die Menge $\mathbb{R}$ ausgestattet mit der gewöhnlichen Metrik $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $d(x, y) := |x - y|$. Dann bildet das Paar $(\mathbb{R}, d)$ einen metrischen Raum. Zeige:

(1) Die einpunktigen Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind abgeschlossen.

(2) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ist weder offen noch abgeschlossen.