Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K.-H. Neeb
Dipl.-Math. Rafael Dahmen,
Dipl.-Math. Stefan Wagner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
Sommersemester 2007
9.5.2007

4. Übungsblatt zur „Analysis I für M, LaG und Ph“

Gruppenübung

Aufgabe G11 (binäre Operatoren)

Das Folgende sind alles *keine* abelschen Gruppen. Gib bei jedem Beispiel an, welche der Axiome (A), (N), (I), (K) erfüllt sind:

- $(\mathbb{N}, +)$ mit $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} : (x, y) \mapsto x + y$
- $(\mathbb{N}, \cdot)$ mit $\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} : (x, y) \mapsto x \cdot y$
- $(\mathbb{N}, \curlyvee)$ mit $\curlyvee : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} : (x, y) \mapsto x \curlyvee y := \max\{x, y\}$
- $(\mathbb{N}_0, \ominus)$ mit $\ominus : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 : (x, y) \mapsto x \ominus y := |x - y| = \max\{x - y, y - x\}$
- $(\mathbb{N}, \curlywedge)$ mit $\curlywedge : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 : (x, y) \mapsto x \curlywedge y := \min\{x, y\}$
- $(\mathbb{N}, \blacktriangleleft)$ mit $\blacktriangleleft : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} : (x, y) \mapsto x \blacktriangleleft y := x$

Aufgabe G12 (ein endlicher Körper (Teil 1))

Wir betrachten die zweielementige Menge $\mathbb{F}_2 := \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ mit der folgenden Addition:

$$\mathbf{0}+\mathbf{0} := \mathbf{1}+\mathbf{1} := \mathbf{0} \text{ und } \mathbf{0}+\mathbf{1} := \mathbf{1}+\mathbf{0} := \mathbf{1}.$$

Die Multiplikation $\cdot$ sei folgendermaßen definiert:

$$\mathbf{0}\cdot\mathbf{0} := \mathbf{0}\cdot\mathbf{1} := \mathbf{1}\cdot\mathbf{0} := \mathbf{0} \text{ und } \mathbf{1}\cdot\mathbf{1} := \mathbf{1}.$$

(a) Verifiziere, dass $(\mathbb{F}_2, +)$ eine abelsche Gruppe ist. Welches Element ist das Neutralelement?

(b) Verifiziere, dass $(\mathbb{F}_2, +, \cdot)$ ein Körper ist. Welches Element ist das Einselement?

Aufgabe G13 (Konstruktion einer Körpererweiterung)

Sei K ein Körper und

$$L := K \times K = K^2 = \{(a, b) : a, b \in K\}.$$

Auf der Menge L definieren wir eine Addition und eine Multiplikation durch

$$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d), \qquad \text{und} \qquad (a, b) \cdot (c, d) := (a \cdot c - b \cdot d, b \cdot c + a \cdot d).$$

Weiter definieren wir eine Funktion:

$$N : L \to K, (a, b) \mapsto a^2 + b^2.$$

(a) Zeige: $(\forall x, y \in L)\ N(x \cdot y) = N(x) \cdot N(y)$.

(b) Zeige: $(L, +)$ ist eine abelsche Gruppe.

(c) Zeige: die Multiplikation auf L ist kommutativ und besitzt ein Einselement. Welches ist es?

(d) Zeige: Für $x := (a, b)$ setze $\bar{x} := (a, -b)$. Zeige: $x \cdot \bar{x} = (N(x), 0)$.

(e) Zeige: Ein Element $x \in L$ besitzt genau dann ein multiplikatives Inverses, wenn $N(x) \neq 0$.

(f) Verwende ohne Beweis die Assoziativität der Multiplikation und das Distributivgesetz von L und folgere:

$$L \text{ ist Körper} \Longleftrightarrow \Big(\big(\forall x \in L\big) \big(N(x) = 0 \Longrightarrow x = 0\big) \Big)$$

Hausübung

Aufgabe H13 (Maxima und Minima)

Entscheide, welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{Q}$ ein Maximum bzw. ein Minimum haben, und gib diese an, falls sie existieren:

- (a) $M_a := \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$,
- (b) $M_b := \left\{ n - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$,
- (c) $M_c := \left\{ \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$,
- (d) $M_d := \{ x \in \mathbb{Q} : 0 < x < 1 \}$,
- (e) $M_e := \emptyset$,
- (f) $M_f := \mathbb{Z}$.

Aufgabe H14 (Permutationsgruppe)

Sei M eine beliebige Menge. In Bemerkung I.4.5 wurde eine *Permutation* auf M definiert als eine Bijektion $f : M \to M$ einer Menge auf sich selbst. Im Folgenden bezeichne
$S_M := \{ f : M \to M : f \text{ bijektiv} \}$ die Menge aller Permutationen auf M.

(a) Zeige, dass die Verkettung $g \circ f$ zweier Permutationen f, g wieder eine Permutation ist.

(b) Zeige, dass die Menge aller Permutationen $(S_M, \circ)$ mit der Verknüpfung

$$\circ : S_M \times S_M \to S_M : (g, f) \mapsto g \circ f$$

als binäre Operation eine Gruppe ist.

(c) Zeige am Beispiel $M := \{1, 2, 3\}$, dass die Gruppe $(S_M, \circ)$ im Allgemeinen nicht abelsch ist.

Hinweis: Du darfst alles verwenden, was in der Vorlesung oder in bereits zurückliegenden Übungen bereits gezeigt wurde.

Aufgabe H15 (Intervalle)

Sei K ein angeordneter Körper und $I, J \subseteq K$ seien Intervalle in K. Zeige: $I \cap J$ ist wieder ein Intervall in K.

Aufgabe H16 (ein endlicher Körper (Teil 2))

Wir betrachten noch einmal den zweielementigen Körper aus Aufgabe (G12).

(a) Lässt sich auf der abelschen Gruppe $(\mathbb{F}_2, +)$ noch eine andere Multiplikation $\bullet$ definieren, sodass $(\mathbb{F}_2, +, \bullet)$ ein Körper wird oder ist die in Aufgabe (G12) angegebene Multiplikation die einzige mögliche Wahl?

(b) Wieso ist es korrekt, zu sagen, dass $\mathbb{F}_2$ der kleinstmögliche Körper ist?

(c) Kann man den Körper $(\mathbb{F}_2, +, \cdot)$ zu einem angeordneten Körper $(\mathbb{F}_2, +, \cdot, K_+)$ machen, d.h. lässt sich der Körper $(\mathbb{F}_2, +, \cdot)$ anordnen?