Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K.-H. Neeb
Dipl.-Math. Rafael Dahmen
Dipl.-Math. Stefan Wagner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

2. Mai 2007

Analysis I für M, LaG und Ph, SS 2007, Übung 3

Gruppenübung

G 7 (Summen ungerader Zahlen).

Gegeben Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ schreibt man kurz $\sum_{k=1}^n a_k$ für ihre Summe $a_1 + \cdots + a_n$. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) \;=\; n^2\,.$$

G 8 (Vermutung und Induktion).

Finde für das Produkt

$$\Pi_{k=2}^{n}(1-\frac{1}{k^2})$$

einen möglichst einfachen Ausdruck und beweise dein Ergebnis mit vollständiger Induktion.

G 9 (Fibonacci-Zahlen).

Man zeige: Ist $a_0 = 0, a_1 = 1$ und $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$, so ist

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n].$$

Es handelt sich um die Fibonacci-Zahlen, bei denen jede Zahl die Summe der beiden vorangehenden ist: $a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 3, a_5 = 5, ...$

Hinweis : Da die Definition von a_{n+2} zwei vorhergehende Glieder benutzt, muß im Induktionsanfang die Behauptung für zwei Startterme nachgewiesen werden.

G 10 (Wo steckt der Fehler?).

Wir behaupten voller Überzeugung: Alle Darmstädter Studierenden sind charmant. Und weil wir Mathematiker sind, wollen wir dies natürlich beweisen:
(IA) Wir stellen fest, dass es charmante Studierende gibt (man betrachte etwa die Menge der Übungsleiter dieser Vorlesung):
(IB) Wir nehmen an, dass jede Gruppe von n Studierenden, die mindestens einen charmanten Studierenden enthält, bereits ausschliesslich aus charmanten Studierenden besteht.
(IS) Nun betrachten wir eine beliebige Gruppe von $n+1$ Studierenden, die mindestens einen charmanten Studierenden enthält.c Wenn ein Studierender die Gruppe für einen kurzen Moment verlässt, dann sind alle anderen Studierenden charmant. (wegen der Induktionsbehauptung). Kommt der Studierende wieder zurück und ein anderer verlässt die Gruppe, so stellt sich heraus, dass der Studierende, der die

Gruppe zuerst verlassen hat, ebenfalls charmant gewesen sein muss. Daher schließen wir, dass alle $n+1$ Studierenden charmant sind.
Dies beweist die Behauptung.

Hausübung

H 9 (Weitere Summenformeln).

Beweisen Sie die folgenden Formeln durch Induktion nach $n \in \mathbb{N}$:

(a) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$;

(b) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2}{4}(n+1)^2$.

H 10 (Cauchy-Schwartz Ungleichung).

Es seien für $n \in \mathbb{N}$ zwei n-Tupel $(a_1, ..., a_n)$, $(b_1, ..., b_n) \in \mathbb{Q}^n$ gegeben. Zeige mittels vollständiger Induktion, dass für n-Tupel gilt:

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2 \leq (\sum_{i=1}^{n} a_i^2)(\sum_{i=1}^{n} b_i^2).$$

H 11 (Varianten des Beweisprinzips der vollständigen Induktion).

Führen Sie die folgenden zwei Beweismethoden zurück auf das Beweisprinzip der vollständigen Induktion:

(a) Es sei $n_0 \in \mathbb{N}$ und $A(n)$ eine gegebene Aussage für jede natürliche Zahl $n \geq n_0$. Zeigen Sie: Gilt $A(n_0)$ und folgt $A(n+1)$ aus $A(n)$ für alle $n \geq n_0$, so gilt $A(n)$ für jedes $n \geq n_0$.

(b) Nun sei $A(n)$ eine Aussage für $n \in \mathbb{N}$. Nehmen Sie an, dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(i) $A(1)$ gilt;

(ii) Gelten $A(1), \ldots, A(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$, so auch $A(n+1)$.

Zeigen Sie, dass dann $A(n)$ gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$.

H 12 (Abzählproblem mit Binomialkoeffizienten).

Stelle dir ein rechteckiges umrandetes Gitter aus $n+1$ vertikalen Linien und $k+1$ horizontalen Linien vor (inklusive Ränder).

(a) Am linken unteren Gittereck sitzt eine Maus. Auf wie vielen Wegen kann die Maus zum Käse im rechten oberen Eck kommen, wenn sie nur entlang der Gitterlinien nach oben und nach rechts laufen kann?

Hinweis : Überlege dir zuerst, wie viele Schritte die Maus bis zum Käse braucht.

(b) Begründe unter Veranschaulichung der Binomialkoeffizienten als Wege im Gitter die folgende Rechenregel für natürliche Zahlen k, m mit $1 \leq k \leq m$:

$$\binom{m-1}{k-1} + \binom{m-1}{k} = \binom{m}{k}$$