Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K.-H. Neeb
Dipl.-Math. Rafael Dahmen,
Dipl.-Math. Stefan Wagner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

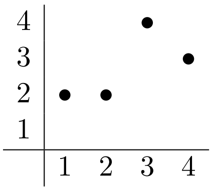
Sommersemester 2007
25.4.2007

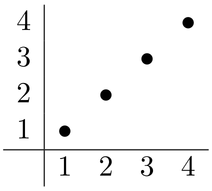
2. Übungsblatt zur „Analysis I für M, LaG und Ph“

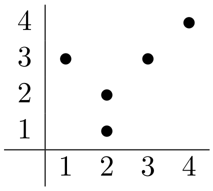
Gruppenübung

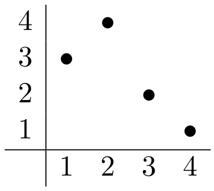
Aufgabe G4 (Graph von Funktionen)

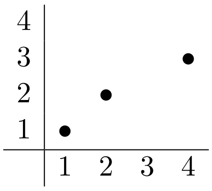
Sei $M := \{1, 2, 3, 4\}$. Welche der folgenden Teilmengen von $M \times M$ sind Graph einer Funktion von M nach M ? Überprüfe bei jeder Funktion, ob sie injektiv, surjektiv, bijektiv ist.

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

Aufgabe G5 (Injektivität und Surjektivität)

Welche der folgenden Funktionen sind injketiv, welche surjektiv, welche sind bijektiv? Im Falle einer bijektiven Funktion gib ihre Umkehrfunktion an.

- $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} : k \mapsto k^2$
- $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} : k \mapsto k^2$
- $h : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} : k \mapsto 7 - k$
- $j : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z} : k \mapsto 7 - k$
- $l : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z} : k \mapsto (-1)^k$
- $t : \mathbb{N} \longrightarrow \{-1, 1\} : k \mapsto (-1)^k$
- $u : \{42, 23\} \longrightarrow \{-1, 1\} : k \mapsto (-1)^k$:
- $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} : k \mapsto k + (-1)^k$

Aufgabe G6 (Rechnen mit Mengen)

Es seien L, M, N Teilmengen der Menge X. Mache zunächst eine Skizze und zeige anschließend die folgenden Aussagen:

(a) $(M \cup N) \cap L = (M \cap L) \cup (N \cap L)$,

(b) $(M \cap N) \cup L = (M \cup L) \cap (N \cup L)$,

(c) $(M \subseteq N) \Leftrightarrow X \backslash N \subseteq X \backslash M$.

Hausübung

Aufgabe H5 (injektiv & surjektiv)

Bezeichne S die Menge aller Studenten an der TU Darmstadt und D die Menge aller Daten eines Jahres.

(a) Sei $f : S \to D$ die Abbildung, die jedem Studenten aus der Menge S das Datum seines Geburtstages zuordnet.

Ist f injektiv, surjektiv oder bijektiv? Was ändert sich, wenn die Menge S durch die Menge aller an deinem Tisch sitzenden Studenten ersetzt wird?

(b) Sei M die Menge aller an der TU Darmstadt vergebenen Matrikelnummern und $g : S \to M$ die Abbildung, die jedem Studenten seine Matrikelnummer zuordnet.

Ist g injektiv, surjektiv oder bijektiv? Was ändert sich, wenn die Menge M durch die Menge der natürlichen Zahlen ersetzt wird?

Aufgabe H6 (Logik)

In der Vorlesung wurde die Injektivität einer Funktion $f\colon A \longrightarrow B$ definiert als

$$(\forall x \in A)(\forall y \in A) f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$$

Wieso ist es ebenfalls möglich die Injektivität von f über

$$(\forall x \in A)(\forall y \in A) x \neq y \Longrightarrow f(x) \neq f(y)$$

zu charakterisieren?

Aufgabe H7 (Verketten von Funktionen)

Gegeben seien die Funktionen $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to C$. Zeigen Sie:

(a) Wenn f und g injektiv sind, dann ist auch $g \circ f$ injektiv.

(b) Wenn f und g surjektiv sind, dann ist auch $g \circ f$ surjektiv.

(c) Wenn f und g bijektiv sind, dann ist auch $g \circ f$ bijektiv und $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

(d) Wenn $g \circ f$ surjektiv ist, dann ist auch g surjektiv.

(e) Wenn $g \circ f$ injektiv ist, dann ist auch f injektiv.

Aufgabe H8 (De Morgan für Mengen)

a) Sei X eine Menge, und $A, B \subseteq X$ Teilmengen von X. Beweisen Sie die folgenden Identitäeten:

$$X \backslash (A \cup B) = (X \backslash A) \cap (X \backslash B)$$

$$X \backslash (A \cap B) = (X \backslash A) \cup (X \backslash B)$$

Gilt dies auch für Mengen A und B, die keine Teilmengen von X sind?

b) Es sei X eine Menge und $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie von Mengen. Beweisen Sie, dass

$$X \setminus \Big(\bigcap_{i \in I} A_i \Big) = \bigcup_{i \in I} (X \setminus A_i)\,.$$