Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K.-H. Neeb
Dipl.-Math. Rafael Dahmen
Dipl.-Math. Stefan Wagner

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

19. Juli 2007

Analysis I für M, LaG und Ph, SS 2007, Tutorium 14

Veränderungsprozesse und Exponentialfunktion

Zahlreiche Prozesse in Natur und Gesellschaft, bei denen eine gewisse Größe u im Lauf der Zeit wächst oder abnimmt, verlaufen *näherungsweise* nach dem folgenden Gesetz oder mathematischen Modell: Innerhalb einer jeden hinreichend kleinen Zeitspanne Δt ist die Zu- oder Abnahme Δu von *u proportional zu dem vorhandenen u und der Zeitspanne Δt*, also

$$\Delta u = \alpha u \Delta t,$$

oder genauer wenn wir die Abhängigkeit der Größe u von der Zeit t durch die Schreibweise $u(t)$ zum Ausdruck bringen,

$$u(t + \Delta t) - u(t) = \alpha u(t)\Delta t; \tag{1}$$

dabei ist α eine Konstante, die für einen Wachstumsprozess positiv und für einen Abnahmeprozess negativ ist und von Fall zu Fall empirisch bestimmt werden muss.
Im Folgenden werden wir sehen, dass die Gleichung

$$u(t) = u_0 e^{\alpha t},$$

für den Anfangswert $u_0 := u(0)$, den Veränderungsprozess modelliert.

Aufgaben

T 48 (Lösung des Veränderungsprozesses - 1.Variante).

Die Gleichung (1) beschreibt den Prozess um so besser, je kleiner Δt ist. Natürlich erhebt sich nun sofort die Frage, ob man mit Hilfe dieses *lokal* gültigen Änderungsgesetzes nicht auch der Endzustand eines *längerdauernden Prozesses* berechnen kann. Wir nehmen an, dass der Prozess zum Zeitpunkt $t = 0$ beginnt und die Dauer $T > 0$ hat. Um zu kleinen Zeitspannen zu kommen, innerhalb derer er gemäß (1) verläuft, unterteilen wir das Intervall $[0, T]$ durch die Zeitpunkte $t_k := k\frac{T}{n}$ $(k = 0, 1, ..., n)$ in n gleich Teile der Länge (oder Dauer) $\Delta t = \frac{T}{n}$.
Zur Abkürzung sei $u_k := u(t_k)$ und das Zeichen $a \approx b$ bedeute, dass *a näherungsweise* gleich b ist.

(a) Zeige, dass man durch sukzessive Anwendung von (1) auf die Teilintervalle $[t_0, t_1], [t_1, t_2], ..., [t_{n-1}, t_n]$ folgende Näherungsgleichung für die Prozesszustände $u_1, ..., u_n$ bekommt:

$$u_k \approx (1 + \alpha\frac{T}{n})u_{k-1} \approx (1 + \alpha\frac{T}{n})^k u_0, \quad k = 1, ..., n.$$

(b) Da $(1+\alpha\frac{T}{n})^n u_0$ den Endzustand $u(T)$ umso besser beschreiben wird, je kleiner $\Delta t = \frac{T}{n}$, also je größer n gewält wurde, wird man vermuten, dass

$$u(T) = \lim_{n\to\infty} (1+\alpha\frac{T}{n})^n u_0$$

ist.
Zeige die Existenz dieses Limes und berechne seinen Wert.

T 49 (Lösung des Veränderungsprozesses - 2.Variante).

Wir nehmen an, dass die gesuchte Lösung u, welche den Veränderungsprozess modelliert, differenzierbar ist und formen (1) zu folgender Gleichung um:

$$\frac{u(t+\Delta t)-u(t)}{\Delta t} = \alpha u(t). \tag{2}$$

(a) Bilde in Gleichung (2) auf beiden Seiten den Grenzwert für $\Delta t \to 0$.
Die hieraus resultierende Gleichung ist eine sogenannte *Differentialgleichung*. Um eine Lösung unseres Problems zu erhalten müssen wir also die gerade gefundenen Differentialgleichung lösen.

(b) Begründe kurz anhand der Differentialgleichung aus Teil (a), dass gesuchte Lösung u beliebig oft differenzierbar ist.

(c) Betrachte nun die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, $f(t) := u(t)e^{-\alpha t}$, wobei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein geeigenter Definitonsbereich der Funktion u sein soll (dies ist abhängig von dem jeweilig gestellten Problem).
Zeige, dass $f'(t) \equiv 0$. Was folgt hieraus für die Funktion f?

(d) Schlussfolgere aus Aufgabenteil (c), dass $u(t) = ce^{\alpha t}$ und bestimme die Konstante $c \in \mathbb{R}$.

T 50 (Doppelwertzeit und Bevölkerungsexplosion. Euler, Adam und Eva).

(a) Zeige: Wächst eine Population P exponentiell, also gemäß

$$u(t) = u_0 e^{\alpha t},\ \alpha > 0,$$

so ist die Zeit δ, innerhalb derer $u(t)$ sich verdoppelt, durch $(ln2)/\alpha$ gegeben.
Diese sogenannte *Doppelwertzeit* der Population ist also unabhängig (!) von $u(t)$: Die Population P braucht, gleichgültig wie groß sie gerade ist, immer dieselbe Zeit δ, um sich zu verdoppeln. Die (menschliche) Erdbevölkerung hat sich seit geraumer Zeit etwa alle 35 Jahre verdoppelt.

(b) Nimm für sie das exponentielle Wachstumsgesetz an berechne die Konstante α.

(c) Ende 1986 gab es rund 5 Milliarden Menschen. Berechne die Größe der Menschheit in den Jahre 2007, 2050, 2501.

(d) Der feste Teil der Erdoberfläche ist etwa $149 \times 10^{12} m^2$ groß. Wieviel Quadratmeter fester Erde werden im Jahr 2501 auf einen Menschen fallen?

Die berechneten Horrorzahlen zeigen, dass das exponentielle Wachstum nicht immer realistisch ist. Ein besserer Gesetz ist das sogenannte *logistische Wachstumsgesetz.*

Euler hat 1748 in seiner *Introductio in analysin infinitorum* die Aufgabe gestellt, "die jährliche Vermehrung der Menschen zu finden, wenn sich deren Anzahl alle hundert Jahre verdoppelt."
Die Antwort des glaubensstarken Kalvinisten (prüfe sie nach!): Ës hätte sich daher die Zahl der Menschen jährlich um den 144sten Teil vermehren müssen, und es sind somit die Einwürfe derjenigen Leute recht lächerlich, welche nicht zugeben wollen, dass die ganze Erde von einem Menschenpaare aus in so kurzer Zeit (seit der Schöpfung) habe bevölkert werden können.

(Im 17. Jahrhundert hatte der Alttestamentler John Lightfoot, eine Zierde der Universität Cambridge, ausgerechnet, der Schöpfungsakt habe am 23.Oktober der Jahres 4004 v.Chr., und zwar um 9 Uhr morgens, stattgefunden. Beim erscheinen der *Introductio* zählte die Welt also gerade 5752 Jahre.)

T 51 (Halbwertzeit).
Unterliegt eine Population oder Substanz einem exponetiellen Abnahmeprozess

$$u(t) = u_0 e^{-\beta t},\ \beta > 0,$$

so ist die Zeit τ, innerhalb derer $u(t)$ sich um die Hälfte vermindert, durch $\tau = (ln 2)/\beta$ gegeben, ist also insbesondere unabh¨ngig von dem gerade vorhandenen Zustand $u(t)$. τ heißt die *Halbwertzeit* der betrachteten Population oder Substanz. Dieser Begriff spielt eine zentrale Rolle beim Studium des Zerfalls radioaktiver Stoffe. Die Halbwertzeit des Thoriums ist z.B. $1,8 \cdot 10^{10}$ Jahre, die des Radiums dagegen nur 1590 Jahre.

Schöne Semesterferien!