Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K.-H. Neeb
Dipl.-Math. Rafael Dahmen,
Dipl.-Math. Stefan Wagner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2007
12.7.2007

13. Tutorium zur „Analysis I für M, LaG und Ph“

Aufgabe T42 (komplexe Zahlenebene)

Zeichne die folgenden Zahlen in die komplexe Zahlenebene ein:

(a) $z_1 := e^{i\pi}$

(b) $z_2 := e^{i\cdot\frac{-\pi}{2}}$

(c) $z_3 := 4 \cdot e^{i\cdot\frac{2\pi}{6}}$

(d) $z_4 := 3 \cdot e^{i\cdot\frac{5}{8}\cdot 2\pi}$

(e) $z_5 := \sqrt{2} \cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{4}}$

(f) $z_6 := e^{i}$

(g) $z_7 := e^{-2}$

Hinweis zur (f): Der Winkel 1 im Bogenmaß entspricht $\left(\frac{360}{2\pi}\right)^\circ \approx 57.2957795^\circ$ im Gradmaß, da $1^\circ := \frac{2\pi}{360}$ ein 360tel des Vollkreises ist.

Aufgabe T43 (Polarkoordinaten)

Aus Satz V.4.14 wissen wir, dass für jede komplexe Zahl $z \neq 0$ genau ein $t \in [0, 2\pi[$ – genannt der *Winkel* von z – existiert mit $z = |z|e^{it} = |z|(\cos t + i \sin t)$. Wir wollen zeigen, wie man diesen Winkel explizit ausrechnet, wenn eine komplexe Zahl in der Form $z = x + iy \neq 0$ gegeben ist.

(a) Einfachster Fall: Nimm an, $x = 0, y > 0$. Bestimme den Winkel t.

(b) Nächster Fall: Nimm an, $x = 0, y < 0$. Bestimme den Winkel t.

(c) Nimm nun an, $x > 0, y \geq 0$. Skizziere $z = x + iy$ in der Zahlenebene und finde den Winkel t mit Schulwissen, indem du ein geeignetes rechtwinkliges Dreieck untersuchst.

(d) Nimm nun an, $x > 0, y < 0$, und gehe ähnlich wie in Aufgabenteil (c) vor.

(e) Berechne t im Fall, der noch nicht untersucht wurde.

Aufgabe T44 (Surjektivität der komplexen Exponentialfunktion)

Zeige, dass $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}\backslash\{0\}$ surjektiv ist. Verwende dazu Satz V.4.14 und die Bijektivität der reellen Exponentialfunktion $\exp_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \longrightarrow]0, +\infty[$.

Aufgabe T45 (Nicht-Injektivität der komplexen Exponentialfunktion)

Wir wollen untersuchen, wie nicht-injektiv die komplexe Exponentialfunktion ist. Nimm an, zwei Zahlen $z, w \in \mathbb{C}$ haben das gleiche Bild $e^z = e^w$. Was lässt sich dann über die Differenz $z - w$ der beiden Zahlen z und w sagen? Hinweis: Folgerung V.4.13.
(Nebenbei: Wie müsste eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{C}$ aussehen, sodass $\exp|_M : M \longrightarrow \mathbb{C}$ injektiv ist?)

[bitte wenden]

Aufgabe T46 (Gleichungen in $\mathbb{C}$)

Finde alle komplexen Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der folgenden Gleichungen, in dem sie auf die Folgerungen V.4.13 und V.4.15 zurückführst:

(a) $e^z = e^{i\pi}$

(b) $z^8 = 2^8$

(c) $z^5 = 3$

(d) $e^z = -12$

(e) $z^4 = -1$

(f) $z^4 = 3 \cdot e^{2\pi i \frac{3}{5}}$

(g) $e^z = 3 \cdot e^{2\pi i \frac{3}{5}}$

Die Lösungen darfst du entweder in der Form $x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$ oder in der Polarform re^{it} mit $r > 0, t \in \mathbb{R}$ angeben.

Aufgabe T47 (noch eine Aufgabe)

Wir wissen, dass für jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ ein eindeutiges $t \in [0, 2\pi[$ existiert mit $z = |z| \cdot e^{it}$, dies erlaubt uns, eine Funktion zu definieren, die jeder komplexen Zahl ungleich 0 eben dieses $t \in [0, 2\pi[$ zuweist:

$$\begin{array}{rcll} \measuredangle \ : \mathbb{C}\backslash\{0\} & \longrightarrow & [0, 2\pi[& \\ z = |z| \cdot e^{it} & \mapsto & t & \quad \text{für } t \in [0, 2\pi[\end{array}$$

Zeige, dass die Funktion $\measuredangle : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to [0, 2\pi[$ *nicht* stetig ist. (Z.B. mit dem Folgenkriterium)