Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K.-H. Neeb
Dipl.-Math. Rafael Dahmen
Dipl.-Math. Stefan Wagner

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

4/5. Juli 2007

Analysis I für M, LaG und Ph, SS 2007, Tutorium 12

Konvexe Funktionen und Differenzierbarkeit

Eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ heißt *konvex*, wenn für alle $x, y \in I$ und alle $t \in [0,1]$ die folgende Ungleichung gilt:

$$f(tx + (1-t)y) \;\leq\; tf(x) + (1-t)f(y)\,.$$

Aufgaben

T 37 Mache dir klar, was diese Definition für den Graphen von f bedeutet.

[Halte x und y fest und fasse beide Seiten der Ungleichung als Funktionen von t auf.]

T 38 Zeige, dass die beiden Funktionen

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto |x|$$

und

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto x^2$$

konvex sind.

T 39 Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion. Zeige, dass f genau dann konvex ist, wenn $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in I$.

Gehe hierzu folgendermaßen vor:

i) Sei zunächst vorausgesetzt, dass $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in I$.

a) Zeige, dass die Ableitung $f' : I \to \mathbb{R}$ monoton wachsend ist.

b) Seien $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ und $0 < t < 1$. Setze $x := tx_1 + (1-t)x_2$. Dann gilt $x_1 < x < x_2$ sowie

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

c) Mache dir klar, dass $x - x_1 = (1-t)(x_2 - x_1)$ und $x_2 - x = t(x_2 - x_1)$ Folgere, dass

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{1 - t} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{t}$$

und weiter

$$f(x) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2).$$

Die Funktion f ist also konvex.

ii) Sei andererseits $f : I \to \mathbb{R}$ konvex.

a) Angenommen, es gelte nicht $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in I$. Dann gibt es ein $x_0 \in I$ mit $f''(x_0) < 0$. Sei $c := f'(x_0)$ und

$$\varphi(x) := f(x) - c(x - x_0) \text{ für } x \in I.$$

Zeige: $\varphi : I \to \mathbb{R}$ ist eine zweimal differenzierbare Funktion mit $\varphi'(x_0) = 0$ und $\varphi''(x_0) = f''(x_0) < 0$. Folgere weiterhin, dass φ in x_0 ein isoliertes lokales Maximum besitzt.

b) Nach Teilaufgabe a) existiert ein $h > 0$, so dass $]x_0 - h, x_0 + h[\subseteq I$ und

$$\varphi(x_0 - h) < \varphi(x_0), \;\; \varphi(x_0 + h) < \varphi(x_0).$$

Folgere hieraus, dass

$$f(x_0) > \frac{1}{2}(f(x_0 - h) + f(x_0 + h)).$$

c) Setze $x_1 := x_0 - h, x_2 := x_0 + h$ und $t := \frac{1}{2}$. Dann gilt $x_0 = tx_1 + (1-t)x_2$. Folgere hieraus einen Widerspruch zur Konvexität von f.

T 40 Wir nennen eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ *konkav*, wenn $-f$ konvex ist. Mache dir wie in **T37** klar, was diese Definition für den Graphen von f bedeutet.

T 41 Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Wir sagen, f habe in $x_0 \in I$ einen *Wendepunkt*, wenn es Intervalle $]a, x_0[$ und $]x_0, b[$ gibt so, dass eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

$$f \text{ ist in }]a, x_0[\text{ konvex und in }]x_0, b[\text{ konkav;}$$

$$f \text{ ist in }]a, x_0[\text{ konkav und in }]x_0, b[\text{ konvex.}$$

Welchen Vorteil hat diese Definition gegenüber der gewöhnlichen Definiton eines Wendepunkts, die man in der Schule lernt? Gib ein Beispiel einer Funktion an, die einen Wendepunkt besitzt, aber nicht differenzierbar ist.