Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K.-H. Neeb
Dipl.-Math. Rafael Dahmen,
Dipl.-Math. Stefan Wagner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2007
28.6.2007

11. Tutorium zur „Analysis I für M, LaG und Ph“

Aufgabe T33 (nicht stetige Funktionen)

Skizziere die Graphen der folgenden Funktionen und markiere ihre Unstetigkeitsstellen (ausnahmsweise alles ohne Beweis):

(a) $g_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \geq 5 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

(b) $g_b : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

(c) $g_c := g_a + g_b$

(d) $g_d : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto [x] := \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$

(e) $g_e : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x + [x]$

(f) $g_f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0 \\ \frac{x}{|x|} & \text{sonst} \end{cases}$

(g) $g_g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } (\exists k \in \mathbb{N}) x = -\frac{1}{k} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

(h) $g_h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x - [x]$

Wir erinnern uns an die Definition von einseitigen Grenzwerten (Definition IV.1.10): Sei $p \in \mathbb{R}$. Wir betrachten alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n < p$, die gegen p konvergieren. Für jede dieser Folgen können wir die entsprechende ,,Bildfolge” $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ betrachten. Falls alle diese Bildfolgen konvergieren und auch alle den gleichen Grenzwert haben, dann nennen wir dies den linksseitigen Grenzwert und schreiben diese Zahl als $\lim_{x\to p^-} f(x)$.

Analog schreiben wir $\lim_{x\to p^+} f(x)$ für den gemeinsamen Grenzwert (falls er existiert) aller Folgen $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge ist, die größer als p ist und gegen p konvergiert.

Wir wissen: f ist genau dann stetig in p, wenn $\lim_{x\to p^-} f(x) = f(p) = \lim_{x\to p^+} f(x)$ gilt.

Aufgabe T34 (Einseitige Grenzwerte an Beispielen)

(a) Suche dir ein paar Beispiele aus Aufgabe (T33) aus. Bestimme anhand der Skizzen (ohne Beweis) die links- und rechtsseitigen Grenzwerte dieser Funktionen an ihren Unstetigkeitsstellen.

(b) Es gibt genau eine Funktion aus Aufgabe (T33), bei der ein einseitiger Grenzwert nicht existiert. Finde diese Funktion, die entsprechende Stelle und begründe formal, warum dieser einseitige Grenzwert nicht existiert.

Wir möchten nun zeigen, dass dieser Fall aus Aufgabe (T34b) bei monotonen Funktionen nicht vorkommen kann:

Aufgabe T35 (Monton wachsende Funktionen und Folgen)

Gegeben sei eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die monoton wächst, d.h. $(\forall x, y \in \mathbb{R}) x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$. Weiterhin sei $p \in \mathbb{R}$ ein Punkt. Wir wollen zeigen, dass $\lim_{x \to p^-} f(x)$ existiert.

(a) Zeige kurz, dass jede monoton wachsende Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von f auf eine monoton wachsende Folge abgebildet wird.

(b) Gib eine möglichst einfache Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an, die monoton wachsend von unten gegen p konvergiert.

(c) Zeige, dass für den Spezialfall der Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus Teil (b) die Folge $(f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen eine Zahl $L \in \mathbb{R}$ konvergiert mit $L \leq f(p)$.

(d) Sei $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge mit $x_m < p$, die (nicht notwendigerweise monton) gegen p konvergiert. Zeige: $(\forall m \in \mathbb{N})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) y_n > x_m$.

(e) Folgere aus (d), dass die Folge $(f(x_m))_{m\in\mathbb{N}}$ nach oben durch L beschränkt wird.

(f) Zeige nun: $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m_0 \in \mathbb{N})(\forall m \geq m_0) y_n < x_m$.

(g) Folgere, dass die Folge $(f(x_m))_{m\in\mathbb{N}}$ auch gegen L konvergiert.

Damit haben wir gezeigt, dass $\lim_{x\to p^-} f(x) = L$ existiert.

Analog kann man zeigen, dass jede monoton wachsende Funktion auch einen rechtsseitigen Grenzwert besitzt und dass dies alles auch für monoton fallende Funktionen funktioniert.

Aufgabe T36 (Sprungstellen)

(a) Begründe, warum eine monoton wachsende Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an jedem Punkt $p \in \mathbb{R}$ entweder stetig ist oder eine Sprungstelle besitzt. (Eine Sprungstelle ist ein Punkt, an dem links- und rechtsseitiger Grenzwert existieren, aber nicht übereinstimmen.)

(b) Begründe, warum bei einer monoton wachsenden Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aus der *Surjektivität* die *Stetigkeit* folgt.

(c) Begründe, warum eine monoton wachsende Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bei jedem Sprung mindestens eine rationale Zahl überspringt.

(d) Versuche dir ein Argument dafür zu überlegen, dass eine monoton wachsende Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nur abzählbar viele Sprungstellen und damit also nur abzählbar viele Unstetigkeitsstellen besitzt.

(e*) Absolute Bonus-Aufgabe: Bei nicht monotonen Funktionen kann es unter Umständen passieren, dass eine Funktion überabzählbar viele Unstetigkeitsstellen besitzt. Das wohl prominenteste Gegenbeispiel, genannt die *Dirichlet-Funktion*, stellen wir hier vor:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{falls } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Zeige, dass diese Funktion an *gar keiner* Stelle $p \in \mathbb{R}$ stetig ist. Es ist sogar richtig, dass kein einziger einseitiger (linksseitiger oder rechtsseitiger) Grenzwert existiert. Hinweis: Fallunterscheidung: Für $p \in \mathbb{Q}$ setze z.B. $x_n := p + \frac{\sqrt{2}}{n}$; für $p \notin \mathbb{Q}$, verwende z.B. (H24).

Orientierungskolloquium

Die Forschungsgebiete des Fachbereichs Mathematik stellen sich vor.

Montag, 02.07.2007 – 16:15-17:15 Uhr – S214/024

Prof. Dr. Martin Kiehl

FG Numerik und wissenschaftliches Rechnen

„Numerische Mathematik und wissenschaftliches Rechnen
Was ist das? Was ist der Unterschied?"

Nach dem Vortrag gibt es ein gemütliches Treffen in S215/219, um über den Vortrag zu reden und den Vortragenden näher kennenzulernen.