Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K.-H. Neeb
Dipl.-Math. Rafael Dahmen
Dipl.-Math. Stefan Wagner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

21/22. Juni 2007

Analysis I für M, LaG und Ph, SS 2007, Tutorium 10

Fixpunktsätze, Lipschitz-Stetigkeit und Kontraktionen

In diesem Tutorium beschäftigen wir uns mit verschiedenen Fixpunktsätzen. Unter einem Fixpunktsatz versteht man einen Satz, der Voraussetzungen angibt, die dafür sorgen, dass eine Funktion $f\colon X \to X$ (mindestens) einen Fixpunkt besitzt, also ein $p \in X$ mit $f(p) = p$. Als Hilfsmittel treten gewisse Arten von Funktionen auf, die besonders schöne Stetigkeitseigenschaften haben (Lipschitz-stetige Funktionen und Kontraktionen).

Aufgaben

T 31 (Lipschitz-Stetigkeit). Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen metrischen Räumen (X, d_X) und (Y, d_Y) heißt *Lipschitz-stetig*, wenn es ein $L \geq 0$ gibt derart, dass

$$(\forall x, y \in X) \quad d_Y(f(x), f(y)) \;\leq\; L \cdot d_X(x, y)\,.$$

Diese Eigenschaft nennt man auch eine (globale) Lipschitzbedingung. Kann man $L < 1$ wählen, so nennt man f eine *Kontraktion*.

(a) Zeige, dass jede Lipschitz-stetige Funktion stetig ist.

(b) Welche der folgenden Funktionen ist Lipschitz-stetig?

$$\begin{array}{rcccccc} f\colon & [0,1] & \to & \mathbb{R} & f(x) & := & x \\ g\colon & [0,1] & \to & \mathbb{R} & g(x) & := & x^2 \\ h\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} & h(x) & := & x^2 \\ w\colon & [0,1] & \to & \mathbb{R} & w(x) & := & \sqrt{x} \end{array}$$

(c) Sind f bzw. g Kontraktionen? Wie steht es mit $s\colon [0, \frac{1}{3}] \to \mathbb{R}$, $s(x) := x^2$?

T 32 (Banachscher Fixpunktsatz).

In dieser Aufgabe beweisen wir einen extrem wichtigen Fixpunktsatz:

Banachscher Fixpunktsatz. *Es sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $f\colon X \to X$ eine Kontraktion. Dann hat f genau einen Fixpunkt.*

Zum Beweis gehen wir in Schritten vor. Zunächst wählen wir ein $L \in [0, 1[$ derart, dass $d(f(x), f(y)) \leq L\, d(x, y)$ für alle $x, y \in X$.

(a) Zeige, dass die Kontraktion f höchstens einen Fixpunkt haben kann (Widerspruchsbeweis!)

Um die Existenz eines Fixpunkts zu zeigen, wählen wir irgendeinen Punkt $x_0 \in X$ und definieren rekursiv eine Folge in X via $x_{n+1} := f(x_n)$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Wir prüfen nun nach, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gegen einen Fixpunkt von f konvergiert.

(b) Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$d(x_{n+1}, x_n) \;\leq\; L^n \, d(x_1, x_0)\,.$$

(c) Zeige, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Cauchy-Folge ist.

(d) Zeige, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gegen ein $p \in X$ konvergiert und dieses p ein Fixpunkt von f ist.

Damit ist der Beweis erledigt. In Anwendungen genügt es häufig, den Fixpunkt p näherungsweise zu kennen. Man begnügt sich dann mit einem der oben rekursiv berechneten Punkte x_n, für genügend großes n. Aus dem Beweis lässt sich eine nützliche Abschätzung für den Fehler der Näherung ableiten:

(e) Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$d(p, x_n) \;\leq\; \frac{L^n}{1-L}\, d(x_1, x_0)\,.$$

(f) Finde eine Kontraktionskonstante L für

$$f\colon [-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}] \to [-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}]\,, \quad f(x) \;:=\; x^3 - \tfrac{1}{4}\,;$$

benutze hierbei, dass $x^3 - y^3 = (x-y)\cdot(x^2 + xy + y^2)$. Um den Fixpunkt p von f näherungsweise zu bestimmen, setzen wir $x_0 := 0$, $x_{n+1} := f(x_n)$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Wie groß muss man n wählen, um sicher sein zu können, dass

$$|p - x_n| \;<\; \frac{1}{100}\,?$$