Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K.-H. Neeb
Dipl.-Math. Rafael Dahmen,
Dipl.-Math. Stefan Wagner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2007
14.6.2007

9. Tutorium zur „Analysis I für M, LaG und Ph“

In diesem Tutorium werden wir zeigen, dass sich jede positive reelle Zahl zu einer Basis b darstellen lässt. Für $b = 10$ ergibt dies die gewöhnliche Dezimaldarstellung, die wir aus der Schule kennen. Für $b = 2$ ergibt dies die sogenannte Dualdarstellung, die in der Informatik sehr oft benötigt wird.

Folgende einfache Tatsache könnte hilfreich sein: Wenn $x \in \mathbb{N}_0, y \in \mathbb{N}$ gegeben sind, dann können wir die sogenannte Division mit Rest durchführen, d.h. es gibt eindeutig bestimmte Zahlen $m \in \mathbb{N}_0$,$c \in \{0, \ldots, y-1\}$, sodass

$$x = m \cdot y + c$$

Sei nun b eine fest gewählte natürliche Zahl größer 1, d.h. $b \in \{2, 3, 4, 5, \ldots\}$.

Aufgabe T29 (b-ale Darstellung von natürlichen Zahlen)

(a) Sei $(c_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge von Zahlen aus der Menge $\mathcal{D} := \{0, 1, \ldots, b-1\}$. Wir nehmen weiterhin an, dass die Folge nur endlich viele Folgenglieder ungleich 0 besitzt. Mache dir klar, dass die folgende Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k b^k$$

nur eine endliche Summe ist und somit konvergiert und dass die Summe in $\mathbb{N}_0$ liegt.

(b) Wir wollen nun zeigen, dass sich jede natürliche Zahl als eine solche Summe schreiben lässt: Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Zeige mit einem Induktionsargument, dass es eine Folge $(c_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ in $\mathcal{D}$ gibt mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k b^k = n$$

(c) Jetzt, da wir die Existenz einer solchen Ziffernfolge $(c_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ gezeigt haben, möchten wir zeigen, dass diese Darstellung immer eindeutig ist. Nimm also an, es gebe eine weitere Folge $(d_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ in $\mathcal{D}$, die auch nach endlich vielen Stellen gleich 0 wird mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k b^k = \sum_{k=0}^{\infty} d_k b^k$$

Zeige per Induktion, dass alle $c_k = d_k$.

(d) Sei $\mathcal{D}^{(N_0)}$ die Menge aller Folgen in $\mathcal{D}$, die nach endlich vielen Gliedern konstant 0 werden. Betrachte die folgende Abbildung

$$\Phi : \mathcal{D}^{(N_0)} \longrightarrow \mathbb{N}_0 : (c_k)_{k\in\mathbb{N}_0} \longmapsto \sum_{k=0}^{\infty} c_k b^k$$

Mache dir klar, dass du in Schritten (b) und (c) die Bijektivität dieser Abbildung gezeigt hast. Welcher Aufgabenteil entspricht der Injektivität, welcher der Surjektivität?

(e) Stelle die Zahl $n = 42$ zur Basis $b = 2$ dar, d.h. finde die Binärdarstellung dieser Zahl.

Aufgabe T30 (b-ale Darstellung von reellen Zahlen)

Um beliebige nichtnegative reelle Zahlen b-al entwickeln zu können, zerlegen wir sie in einen ganzzahligen Anteil und einen gebrochenen Anteil. $r := [r] + (r - [r])$. Hierbei ist $[r] := \max\{k \in \mathbb{N}_0 : k \leq r\}$ der ganzzahlige Anteil und $r - [r] \in [0, 1[$ ist der gebrochene Anteil.

(a) Sei $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zahlen aus der Menge $\mathcal{D} := \{0, 1, \ldots, b-1\}$. Wir nehmen diesmal *nicht* an, dass die Folge nach endlich vielen Schritten 0 wird. Zeige die Konvergenz der folgenden Reihe

$$\sum_{l=1}^{\infty} d_l b^{-l}$$

und zeige, dass ihr Grenzwert im abgeschlossenen Intervall $[0, 1]$ liegt.

(b) Wir wollen nun zeigen, dass sich jede reelle Zahl r im Intervall $[0, 1]$ als eine solche Reihe schreiben lässt. Zeige dies für die Spezialfälle $r = 0$ und $r = 1$.

(c) Sei nun $r \in]0, 1[$ und $l \in \mathbb{N}$. Zeige, dass es genau eine endliche Summe der Form

$$\sum_{j=1}^{l} d_j b^{-j}$$

gibt, sodass der Abstand dieser Summe zu r kleiner als b^{-l} ist.

(d) Zeige, dass sich die so gefundenen Koeffizienten nicht ändern, wenn l größer wird.

(e) Schließe, dass $\sum_{l=1}^{\infty} d_l b^{-l} = r$.

(f) Zeige an einem Beispiel, dass diese Darstellung *nicht* eindeutig ist, d.h. finde zwei unterschiedliche Folgen $(d_l)_{l\in\mathbb{N}}$ und $(e_l)_{l\in\mathbb{N}}$ derart, dass

$$\sum_{l=1}^{\infty} d_l b^{-l} \neq \sum_{l=1}^{\infty} e_l b^{-l}.$$

(g) Sei $\mathcal{D}^{N_0}$ die Menge aller Folgen in $\mathcal{D}$. Betrachte die folgende Abbildung

$$\Psi : \mathcal{D}^{N_0} \longrightarrow [0, 1] : (d_l)_{l\in\mathbb{N}} \longmapsto \sum_{l=1}^{\infty} d_l b^{-l}$$

Ist diese Abbildung injektiv? Ist sie surjektiv?

(h) Sei $\mathcal{M}$ die Menge aller Folgen in $\mathcal{D}$, die nach endlich vielen Gliedern konstant $(b-1)$ werden. Zeige: die eingeschränkte Version von Ψ

$$\widehat{\Psi} : \mathcal{D}^{N_0} \backslash \mathcal{M} \longrightarrow [0, 1[: (d_l)_{l\in\mathbb{N}} \longmapsto \sum_{l=1}^{\infty} d_l b^{-l}$$

ist bijektiv, d.h. jede reelle Zahl im halboffenen Intervall $[0, 1[$ besitzt genau eine b-ale Entwicklung, deren Ziffern niemals konstant $(b-1)$ wird.