Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K.-H. Neeb
Dipl.-Math. Rafaël Dahmen,
Dipl.-Math. Stefan Wagner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
Sommersemester 2007
31.5.2007

7. Tutorium zur „Analysis I für M, LaG und Ph“

Konstruktion der Reellen Zahlen aus den Rationalen Zahlen

Wir haben die reellen Zahlen axiomatisiert (als einen vollständig angeordneten Körper), wissen aber noch nicht, ob solche Körper überhaupt existieren. In diesem Tutorium holen wir das nach und konstruieren die reellen Zahlen aus den rationalen.

Hierzu definieren wir uns auf dem angeordneten Körper $\mathbb{Q}$ die Abstandsfunktion

$$d : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, (x, y) \mapsto |x - y|$$

Da wir die reellen Zahlen noch nicht zur Verfügung haben, haben hier statt $\mathbb{R}$ (wie üblich bei Abstandsfunktionen) den Körper $\mathbb{Q}$ als Wertebereich genommen. Dies stört aber nicht, und können trotzdem von konvergenten Folgen und Cauchy-Folgen in $\mathbb{Q}$ reden. Wir erinnern daran, dass eine Nullfolge eine Folge ist, die gegen 0 konvergiert.

Die reellen Zahlen werden schließlich gewisse Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen sein.

Hinweis: Die Konstruktion ist recht umfangreich, und wir erwarten nicht, dass alle Schritte durchgeführt werden! Insbesondere die mit Sternchen versehenen Aufgabenteile sollte man zwar durchlesen, aber jetzt nicht bearbeiten.

Aufgabe T23 (Vorüberlegungen zu Cauchy-Folgen)

Es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folgen in $\mathbb{Q}$.

(a) Zeige, dass $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.

(b) Zeige, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist.

(c) Zeige, dass $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.

(d) Zeige: Falls $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge, so gibt eine rationale Zahl $\epsilon > 0$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ derant, dass entweder

$$(\forall n \geq n_0) x_n \geq \epsilon \text{ oder } (\forall n \geq n_0) x_n \leq -\epsilon$$

gilt.

(e) Zeige, dass für alle $a, b \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$ gilt: $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{a}(b - a)\frac{1}{b}$.

(f) Zeige: Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge und ist $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $\left(\frac{1}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge.

Aufgabe T24 (Die reellen Zahlen als Menge und Körper)

Sei $\mathcal{C}$ die Menge aller Cauchy-Folgen in $\mathbb{Q}$.

(a) Wir sagen, zwei Cauchy-Folgen heißen *äquivalent* und schreiben $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, falls $x_n - y_n \to 0$. Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{C}$ ist. (siehe letztes Tutorium für die Definition einer Äquivalenzrelation)

Wir definieren nun: $\mathbb{R} := \mathcal{C}/\sim$. Im Folgenden meint $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ die Äquivalenzklasse von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) Zeige, dass die Summe und das Produkt von zwei Äquivalenzklassen wohldefiniert ist, d.h. unabhängig von der Wahl des Repräsentanten.

(c) Zeige, dass $(\mathbb{R}, +)$ eine abelsche Gruppe ist.

(d)* Zeige, dass die Multiplikation assoziativ ist, ein Neutralelement besitzt und für $+$ und $\cdot$ das Distributivgesetz gilt.

(e) Zeige, dass jedes Element $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in \mathbb{R}$, dass von $[(0)_{n\in\mathbb{N}}]$ verschieden ist, multiplikativ invertierbar ist, d.h. $\mathbb{R}$ ist ein Körper.

Aufgabe T25 (Die Anordnung auf $\mathbb{R}$)

Wir nennen eine Cauchyfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{Q}$ positiv, wenn ein $\epsilon > 0$ existiert und ein $n_o \in \mathbb{N}$, sodass $(\forall n \geq n_0) x_n \geq \epsilon$. Man überlegt sich leicht, dass dies unabhängig von der Wahl des Repräsentanten ist. Somit können wir definieren $\mathbb{R}_+ := \{[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist positiv}\}$.

(a) Zeige, dass $(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ ein angeordneter Körper ist.

(b) Überlge dir, wie man $\mathbb{Q}$ als Unterkörper von $\mathbb{R}$ auffassen kann.

(c)* Zeige, dass $(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ archimedisch angeordnet ist.

Es bleibt zu zeigen, dass $\mathbb{R}$ vollständig angordnet ist. Dazu sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge. Dann gibt es ein $s_0 \in \mathbb{Z}$ mit $s_0 \geq A$. Wir wählen s_0 minimal mit dieser Eigenschaft. Ist $s_0 - \frac{1}{2} \geq A$, so setzen wir $s_1 := s_0 - \frac{1}{2}$, andernfalls setzen wir $s_1 := s_0$. Rekursiv setzen wir

$$\begin{array}{rcl} s_n := & s_{n-1} - 2^{-n} & \text{falls } s_{n-1} - 2^{-n} \geq A \\ s_n := & s_n - 1 & \text{sonst.} \end{array}$$

(d) Zeige, dass $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{Q}$ ist.

(e)* Zeige, dass in $\mathbb{R}$ gilt, dass $\sup A = [(s_n)_{n\in\mathbb{N}}]$.

Wichtige Mitteilung:

Vollversammlung

Aller Studierenden des Fachbereichs Mathematik

Dienstag, 5.6.2007 ab 16:15 Uhr in S103/23

Themen werden unter anderem sein:

- Stand der Verfassungsklage gegen Studiengebühren
- Verwendung von Studiengebühren
- Veränderung der Raumsituation am Fachbereich
- Hochschulwahlen
- ...