Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K.-H. Neeb
Dipl.-Math. Rafael Dahmen
Dipl.-Math. Stefan Wagner

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

24/25. Mai 2007

Analysis I für M, LaG und Ph, SS 2007, Tutorium 6

Äquivalenzrelationen

Wir nennen eine Relation $\sim$ auf einer Menge X eine *Äquivalenzrelation*, wenn für alle $a, b, c \in X$ gilt:

(i) $a \sim a$ (Reflexivität);

(ii) $a \sim b \Rightarrow b \sim a$ (Symmetrie);

(iii) $(a \sim b \wedge b \sim c) \Rightarrow a \sim c$ (Transitivität).

Für ein $a \in X$ nennt man $[a] := \{x \in X : x \sim a\}$ die *Äquivalenzklasse* von a. Ein Element b einer Äquivalenzklasse $[a]$ nennt man einen *Repräsentanten* von $[a]$.

Überlege dir, dass für alle $b \in [a]$ gilt $[a] = [b]$.

Aufgaben

T 20 (Äquivalenzrelationen und Partitionen).

Es sei X eine Menge. Eine *Partition von* X ist eine Menge $P \subseteq \mathcal{P}(X)$ nichtleerer Teilmengen von X, die paarweise disjunkt sind (d.h. für alle $A_1, A_2 \in P$ mit $A_1 \neq A_2$ ist $A_1 \cap A_2 = \emptyset$) und deren Vereinigung ganz X ist, $X = \bigcup_{A \in P} A$.

(a) Zeige: Ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X, so ist die Menge

$$X/\!\sim \; := \{[x] : x \in X\}$$

der Äquivalenzklassen eine Partition von X.

(b) Zeige, dass umgekehrt jede Partition P von X zu einer Äquivalenzrelation $\sim_P$ führt: Man schreibt $x \sim_P y$ für $x, y \in X$ genau dann, wenn ein $A \in P$ existiert mit $x, y \in A$.

Man kann leicht zeigen, dass die zur Partition $X/\sim$ gehörende Äquivalenzrelation wieder $\sim$ ist. Umgekehrt ist die zu $\sim_P$ gehörige Partition wieder P. Somit gilt:

Die Partitionen von X entsprechen genau den Äquivalenzrelationen auf X.

(c) Für $n, m \in \mathbb{Z}$ sei $n \sim m$, wenn $n - m \in 2\mathbb{Z}$. Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$ ist und finde die Äquivalenzklassen. Überlege dir, dass $\mathbb{Z}/\sim$ ein zu $\mathbb{F}_2$ isomorpher Körper ist (vgl. Aufgabe G12).

T 21 ("Wohldefiniertheit" und Faktorisieren von Abbildungen).

Es sei X eine Menge, $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X und $q\colon X \to X/\!\sim$, $q(x) := [x]$ die sogenannte "kanonische Quotientenabbildung."

Gegeben eine Abbildung $f\colon X \to Y$ möchte man häufig durch Anwenden auf Repräsentanten daraus eine Abbildung $\tilde{f}\colon X/\!\sim \to Y$ gewinnen:

$$\tilde{f}\colon X/\!\sim \to Y\,, \qquad [x] \mapsto f(x)\,. \tag{1}$$

Nun könnte die rechte Seite aber noch vom gewählten Repräsentanten x der Äquivalenzklasse $[x]$ abhängen. Ist dies nicht der Fall, so ist die Abbildung $\tilde{f}$ sinnvoll definiert. Man sagt, $\tilde{f}$ sei "wohldefiniert."

Wir wollen nun präzisieren, wann $\tilde{f}$ wohldefiniert ist.

(a) Zeige, dass es genau dann eine Abbildung $\tilde{f}\colon X/\!\sim \to Y$ mit $\tilde{f} \circ q = f$ gibt, wenn aus $q(x_1) = q(x_2)$ stets $f(x_1) = f(x_2)$ folgt.

(b) Zeige, dass $\tilde{f}$, falls es existiert, durch die Bedingung $\tilde{f} \circ q = f$ eindeutig festgelegt ist.

Sprechweise: Man sagt in voriger Situation auch, dass f "über die Abbildung q faktorisiert" und nennt $\tilde{f}$ die "induzierte" Abbildung.

T 22 (Konstruktion der rationalen Zahlen aus den ganzen Zahlen).

Auf $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ definieren wir die Relation $\sim$ durch $(z,n) \sim (z',n') \Leftrightarrow zn' = z'n$.

(a) Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist. Wir definieren $\mathbb{Q} := \mathbb{Z}/\!\sim$.

(b) Zeige, dass die Abbildungen

$$\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}\,, \quad [(z_1,n_1)] \cdot [(z_2,n_2)] := [(z_1z_2, n_1n_2)] \tag{3}$$

und

$$\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}\,, \quad [(z_1,n_1)] + [(z_2,n_2)] := [(z_1n_2 + n_1z_2, n_1n_2)] \tag{4}$$

wohldefiniert sind.

(c) Zeige, dass $(\mathbb{Q}, +)$ eine abelsche Gruppe ist, mit Neutralelement $[(0,1)]$.

(d) Zeige, dass $(\mathbb{Q}, \cdot)$ eine kommutatives Monoid ist mit Neutralelement $[(1,1)]$. Zeige, dass jedes von $[(0,1)]$ verschiedene Element aus $\mathbb{Q}$ invertierbar ist.

Man kann noch das Distributivgesetz nachprüfen; somit ist $\mathbb{Q}$ ein Körper.

Man nennt $\frac{z}{n} := [(z,n)]$ einen Bruch; die obigen Formeln (3) und (4) sind die üblichen Rechenregeln für Addition und Multiplikation von Brüchen.