Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K.-H. Neeb
Dipl.-Math. Rafaël Dahmen,
Dipl.-Math. Stefan Wagner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2007
18.5.2007

5. Tutorium zur „Analysis I für M, LaG und Ph“

Definition: Ein angeordneter Körper (K, K_+) heiße *archimedisch angeordnet*, wenn für alle $a, b \in K$ mit $b > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $nb > a$.

In der Vorlesung vom 7.5.2007 wurde der sogenannte ,,Satz von Archimedes” bewiesen, der besagt, dass jeder *vollständig* angeordneter Körper *archimedisch* angeordnet ist.

Aufgabe T15 (Archimedisch, aber nicht vollständig angeordnet)

Mache dir klar, dass $(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}_+)$ ebenfalls archimedisch angeordnet ist, obwohl $\mathbb{Q}$ nicht vollständig angeordnet ist. Dies zeigt, dass die Eigenschaft vollständig angeordnet zu sein, echt stärker ist, als die Eigenschaft archimedisch angeordnet zu sein.

In der Vorlesung am 7.5.2007 kam die Zwischenfrage, ob es überhaupt angeordnete Körper gibt, die *nicht* archimedisch angeordnet sind. Ein solches Beispiel wollen wir nun konstruieren. Dazu benötigen wir ein Hilfsmittel, nämlich die Menge der Polynomfunktionen:

Definition: Eine Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ heiße ,,*Polynomfunktion*”, wenn es Zahlen $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n.$$

Anmerkung: Solche Funktionen werden in einigen Schulbüchern auch oft ,,ganzrationale Funktionen” genannt. Die Menge aller Polynomfunktionen werden wir mit $\mathbb{R}[x]$ bezeichnen.

Aufgabe T16 (Rechnen mit Polynomfunktionen)

(a) Zeige, dass die Summe von zwei Polynomfunktionen wieder eine Polynomfunktion ist.

(b) Mache dir klar, dass $(\mathbb{R}[x], +)$ eine abelsche Gruppe bildet. Wie sieht das Neutralelement aus?

(c) Beweise, dass das Produkt zweier Polynomfunktionen wieder eine Polynomfunktion ist.

(d) Finde das multiplikative Neutralelement.

(e) Warum ist $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ kein Körper ?

Definition: Wir sagen, eine Polynomfunktion $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ habe den *Grad* n, wenn $a_n \neq 0$ ist. Die Zahl a_n heißt *Leitkoeffizient* von f. (Achtung: Diese Definition weist *nicht* jeder Polynomfunktion einen Grad und einen Leitkoeffizienten zu. Den Leitkoeffizienten von f werden wir im Folgenden mit $L(f)$ bezeichen.

Aufgabe T17 (Rechnen mit Leitkoeffizienten)

(a) Für welche Polynomfunktion sind Grad und Leitkoeffizient nicht definiert?

(b) Wie sehen Polynomfunktionen von Grad 0 aus? Wie sehen Polynomfunktionen von Grad 1 aus? (Skizze)

(c) Zeige, dass der Leitkoeffizient eines Produktes zweier Polynomfunktionen das Produkt der Leitkoeffizienten ist, d.h.

$$(\forall f, g \in \mathbb{R}[x]) L(f \cdot g) = L(f) \cdot L(g)$$

(d) Ist es ebenfalls korrekt, dass der Leitkoeffizient einer Summe zweier Polynomfunktionen die Summe der Leitkoeffizienten ist? d.h.

$$(\forall f,g \in \mathbb{R}[x]) L(f+g) = L(f) + L(g) \ ?$$

(e) Zeige folgende Implikation:

$$(\forall f,g \in \mathbb{R}[x]) \Big(L(f) > 0, L(g) > 0 \Big) \implies \Big(L(f+g) > 0 \Big)$$

Aufgabe T18 (Verhalten einer Polynomfunktion im Unendlichen)
Eine reellwertige Funktion heiße *schließlich positiv*, wenn es eine reelle Zahl $R > 0$ gibt, sodass $(\forall x > R) f(x) > 0$. Sei $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ eine Polynomfunktion mit Leitkoeffizient $L(f) = a_n$. Wir wollen zeigen, dass f „schließlich positiv" ist, wenn $a_n > 0$ ist. Dazu kann man z.B. so vorgehen:

(a) Mache dir klar, dass für alle $x > 1$ gilt:

$$\left| a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} \right| \leq \left(\sum_{j=1}^{n-1} |a_j| \right) \cdot x^{n-1}$$

(b) Zeige: Für alle $x > 1$ gilt:

$$f(x) \geq a_n \cdot x^n - C \cdot x^{n-1}.$$

Hierbei ist $C := \left(\sum_{j=1}^{n-1} |a_j| \right)$.

(c) Zeige: Für alle $x > 1$ und $x > \frac{c}{a_n}$ gilt: $f(x) > 0$.
(Also ist f schließlich positiv für $R := \max\{1, \frac{C}{a_n}\}$.)

Definition: Wenn f und g Polynomfunktionen sind und g nicht die konstante Nullfunktion ist, dann nennen wir den Bruch $\frac{f}{g}$ eine *rationale Funktion.* (in einigen Schulbüchern werden diese Funktionen dann „gebrochen rational" genannt) Mit diesen Brüchen kann man rechnen, wie man es von den rationalen Zahlen kennt, nur dass im Zähler wie im Nenner keine ganzen Zahlen, sondern halt reelle Polynomfunktionen stehen.

Aufgabe T19 (der Körper der Rationale Funktionen)
Sei $K := \{\frac{f}{g} : f,g \in \mathbb{R}[x], g \neq 0\}$ die Menge aller rationalen Funktionen.

(a) Zeige, dass die rationalen Funktionen mit der gewöhnlichen Addition und Multiplikation einen Körper bilden.

(b) Zeige, dass $\frac{f}{g} \in K$ genau dann schließlich positiv ist, wenn $\frac{L(f)}{L(g)} > 0$ ist.

(c) Sei $K_+ := \left\{ \frac{f}{g} : \frac{f}{g} \text{ ist schließlich positiv, d.h. } \frac{L(f)}{L(g)} > 0 \right\}$. Zeige, dass (K, K_+) ein angeordneter Körper ist.

(d) Zeige, dass $(K, K_+$ *nicht* archimedisch angeordnet ist, nimm z.B. $a(x) = x$ und $b(x) = 1$.

Somit haben wir einen angeordneten Körper konstruiert, der nicht archimedisch ist.