Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K.-H. Neeb
Dipl.-Math. Rafael Dahmen
Dipl.-Math. Stefan Wagner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

10./11 Mai 2007

Analysis I für M, LaG und Ph, SS 2007, Tutorium 4

Existenz k-ter Wurzeln

Wie wir bereits gesehen haben, ist die quadratische Gleichung $x^2 - a = 0$ bei beliebig vorgegebenen positiven $a \in \mathbb{Q}$ im allgemeinen nicht durch ein $x \in \mathbb{Q}$ lösbar ist, denn $\sqrt{2}$ und allgemeiner $\sqrt{p}$ ist nicht rational für jede Primzahl $p \in \mathbb{N}$. In diesem Tutorium zeigen wir, dass Gleichungen der Form $x^k - a = 0$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ und jeden nichtnegativen reelen Wert von $a \in \mathbb{R}$ lösbar ist. An dieser Stelle benutzen wir ganz wesentlich das Vollständigkeitsaxiom, denn aus Körper- und Anordnugsaxiomen allein lässt sich die Existenz k-ter Wurzeln nicht erschließen.

Aufgaben

T 11 (Ganzzahlige Potenzen).

Sei (K, K_+) ein angeordneter Körper und $x, y \in K$ mit $0 < x < y$.
Zeige, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt $0 < x^k < y^k$. (Hinweis: Vollständige Induktion)

T 12 (Existenz k-ter Wurzeln).

Beweis den folgenden Satz:

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ und jede nichtnegative reele Zahl a existiert genau eine nichtnegative reele Zahl b mit $b^k = a$.

Gehe dabei folgendermaßen vor:

(a) Mache dir zunächst klar, dass du dich auf den Fall $a > 0$ beschränken kannst. Im folgenden sei daher $a > 0$.

(b) Betrachte nun die Menge $M := \{x \in [0, \infty[: x^k \leq a\}$ und zeige $M \neq \emptyset$.

(c) Zeige, dass $y := \max(1, a)$ eine obere Schranke für M ist und folgere, dass $\sup M$ existiert.

(d) Sei $b \geq 0$ und
$$C := k \cdot \max\{\binom{k}{j} b^{k-j} : j = 1, ..., k\}.$$
Folgere für $0 < h < 1$ aus dem Binomischen Lehrsatz
$(b + h)^k \leq b^k + hC$ und entsprechend $(b - h)^k \geq b^k - hC$.

(e) Setze $b := \sup M$. Zeige $b^k = a$, indem du die Annahme $b^k \neq a$ zu einem Widerspruch führst.
(Hinweis: Ist $b^k < a$ verwende Teilaufgabe (c) für $h := \frac{1}{2}\min(1, \frac{a-b^k}{C})$.
Ist $b^k > a$ verwende Teilaufgabe (c) für $h := \frac{1}{2}\min(1, \frac{b^k-a}{C})$.)
Hiermit ist die Existenz eines $b > 0$ mit $b^k = a$ gezeigt.

(f) Beweise nun noch die Eindeutigkeitsaussage.

T 13 (Rationale Potenzen).

Zeige:

(a) $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall a, b \in \mathbb{R})\ \ 0 \leq a < b \Rightarrow \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

(b) Für alle $q \in \mathbb{Q}_+$ und $a, b \in \mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ mit $a < b$ ist $a^q < b^q$. Hinweis: Man betrachte zuerst den Fall $q \in \mathbb{N}$ bzw. $q \in \mathbb{Z}$ und dann den Fall $q = \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$. Schließlich setze man beides zusammen.

T 14 ($\mathbb{Q}$ ist nicht ordnungsvollständig).

Betrachte die Menge

$$M := \{x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x,\ x^2 \leq 2\}$$

und zeige, dass M beschränkt ist, aber kein Supremum in $\mathbb{Q}$ besitzt.