Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K.-H. Neeb
Dipl.-Math. Rafael Dahmen,
Dipl.-Math. Stefan Wagner

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Sommersemester 2007
3.5.2007

3. Tutorium zur „Analysis I für M, LaG und Ph“

Hinweis: Wie in der Vorlesung auch bezeichne $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ immer die Menge der natürlichen Zahlen ohne Null, und $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ die Menge der nichtnegativen ganzen Zahlen, inklusive der Null. (Achtung: Dies kann in anderen Veranstaltungen anders sein! Manchmal ist auch die Null natürlich.)

Aufgabe T7 (Binomischer Lehrsatz)

Zeige, unter Verwendung des Binomischen Lehrsatzes, folgende Formel:

$$(\forall k \in \mathbb{Q})(\forall q \in \mathbb{N}) \quad (k+1)^q - k^q \;=\; \sum_{r=0}^{q-2} \binom{q}{r} k^r + qk^{q-1}. \tag{1}$$

Überprüfe insbesondere die Gültigkeit der Formel für den Fall $q = 1$.

Aufgabe T8 (Teleskopsumme)

Gegeben seien Zahlen $n \in \mathbb{N}_0, q \in \mathbb{N}$. Vereinfache – ohne Verwendung von Aufgabe (T7) – den folgenden Ausdruck:

$$\sum_{k=0}^{n} \Big((k+1)^q - k^q \Big).$$

Aufgabe T9 (Summenformeln)

Für $p, n \in \mathbb{N}_0$ setze $S^{(p)}(n) := \sum_{k=0}^{n} k^p$. Aus der Vorlesung wissen wir bereits, dass

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0)\; S^{(1)}(n) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

In den Hausübungen des 3. Übungsblattes wird per Induktion bewiesen, dass

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0)\; S^{(2)}(n) = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

und

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0)\; S^{(3)}(n) = \frac{n^2}{4}(n+1)^2.$$

Mit vollständiger Induktion kann man allerdings nur Formeln beweisen, die man bereits formuliert hat. Damit bleibt also unklar, wie man diese Formeln findet und ob es zu jedem Exponenten p eine solche Formel gibt.

[bitte wenden]

(T9 a) Sei $n \in \mathbb{N}_0, q \in \mathbb{N}$. Summiere beide Seiten der Gleichung 1 aus Aufgabe (T7) von $k = 0$ bis n und leite so folgende Formel her (unter Verwendung der (T8)):

$$(n+1)^q = \sum_{r=0}^{q-2} \binom{q}{r} S^{(r)}(n) + q \cdot S^{(q-1)}(n).$$

(T9 b) Ersetze nun q durch $p+1$ für ein $p \in \mathbb{N}_0$ und löse anschließend nach $S^{(p)}(n)$ auf. Nun müsstest du eine Formel für beliebigen Exponenten p haben, in der allerdings alle Formeln $S^{(r)}(n)$ für $r < p$ vorkommen.

Aufgabe T10 (noch mehr Summenformeln)

Zeige mit Hilfe von (T9 b), wie man die Formeln für $S^{(0)}(n)$, $S^{(1)}(n)$ und $S^{(2)}(n)$ findet. Falls du noch Zeit und Lust auf weitere Rechnungen hast, leite auf diesem Wege die Formeln für $S^{(3)}(n)$ und $S^{(4)}(n)$ her.