Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K.-H. Neeb
Dipl.-Math. Rafael Dahmen
Dipl.-Math. Stefan Wagner

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

26./27 April 2007

Analysis I für M, LaG und Ph, SS 2007, Tutorium 2

Funktionen und Mächtigkeit von Mengen

Aufgaben

T 3 (Funktionen I)

(a) Ist $f : X \to \emptyset$ eine Funktion, so ist $X = \emptyset$.

(b) Für jede Menge Y ist $f = (\emptyset, Y, \emptyset)$ eine Funktion. Ihr Graph Γ_f ist die leere Menge. Man beachte, dass auch die Menge $\emptyset \times Y$ leer ist.

T 4 (Funktionen II)

Im folgenden sei X eine nichtleere Menge. Zeige:

(a) Eine Funktion $f : X \to Y$ ist genau dann injektiv, wenn eine Funktion $g : Y \to X$ existiert, so dass
$$g \circ f = \mathrm{id}_X.$$

(b) Eine Funktion $f : X \to Y$ ist genau dann surjektiv, wenn eine Funktion $g : Y \to X$ existiert, so dass
$$f \circ g = \mathrm{id}_Y.$$

(c) Eine Funktion $f : X \to Y$ ist genau dann bijektiv, wenn eine Funktion $g : Y \to X$ so existiert, so dass
$$f \circ g = \mathrm{id}_Y \quad \text{und} \quad g \circ f = \mathrm{id}_X.$$

T 5 (Mächtigkeit von Mengen I)

Zur Erinnerung:

1) Eine Menge M heißt *endlich*, wenn sie leer ist oder eine $n \in \mathbb{N}$ existiert, so dass M gleichmächtig ist zu $\{1, 2, ..., n\}$, d.h., es existiert eine bijektive Abbildung
$$f : \{1, 2, ..., n\} \to M.$$

2) Eine Menge M heißt *abzählbar*, wenn sie leer ist oder eine surjektive Abbildung $f \colon \mathbb{N} \to M$ existiert.

(a) Zeige, dass Definition 1) wohldefiniert ist.

(b) Zeige, dass jede endliche Menge abzählbar ist.

(c) Zeige, dass jede unendliche abzählbare Menge gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ ist. Zeige hierzu, dass aus der Existenz einer surjektiven Funktion $f\colon \mathbb{N} \to M$ die einer bijektiven Funktion $g\colon \mathbb{N} \to M$ folgt. Hierzu definiert man

$$h(n) := \min\{m \in \mathbb{N} : |\{f(1), ..., f(m)\}| = n\}.$$

Dann ist $h(n) \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und man kann zeigen, dass $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine injektive Funktion ist, für die $g := f \circ h : \mathbb{N} \to M$ bijektiv ist.

T 6 (Mächtigkeit von Mengen II)

Beweise Satz I.3.13 aus der Vorlesung: Die Mengen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sind gleichmätig.

Gehe dabei follgendermaßen vor:

(a) Zeige, dass für die Mengen

$$M_n := \{(1, n), (2, n-1), ..., (n-1, 2), (n, 1)\}, \quad n = 1, 2, ...$$

$M_n \cap M_m = \emptyset$ falls $n \neq m$, sowie $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \cup_{n \in \mathbb{N}} M_n$ gilt.
(Man sagt, dass $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ die *disjunkte* Vereingung der Teilmengen M_n ist.)

(b) Zeige nun, dass die Funktion f die Mengen M_n bijektiv auf

$$N_n := \{\frac{n(n-1)}{2} + 1, \frac{n(n-1)}{2} + 2, ..., \frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}\}$$

abbildet.

(c) Zeige weiter, dass $\mathbb{N}$ die disjunkte Vereinigung der Teilmengen N_n ist. Es ist hilfreich sich $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ als rechteckige Tabelle von Paaren (p, q) vorzustellen, und jedem Paar seine Platznummer zu zuordenen.

Dies zeigt nun, dass die Menge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ nicht wirklich größer als $\mathbb{N}$ ist.