Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K.-H. Neeb
Dipl.-Math. Rafael Dahmen,
Dipl.-Math. Stefan Wagner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2007
19.4.2007

1. Tutorium zur „Analysis I für M, LaG und Ph“

Aufgabe T1 (Logische Operatoren)

Zu zwei gegebenen logischen Aussagen p und q definieren wir den logischen Operator $p \mid q$ (genannt den *Sheffer-Strich* durch folgende Wahrheitstafel:

p	q	$p \mid q$
W	W	F
W	F	W
F	W	W
F	F	W

a) Drücke den Sheffer-Strich durch die bereits bekannten logischen Operatoren aus. Beschreibe die Bedeutung in deinen eigenen Worten.

b) Stelle die logischen Operatoren $\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow$ nur mit Hilfe des Sheffer-Striches dar.

c) Stelle die logischen Konstanten $\mathbf{W}$ und $\mathbf{F}$ mit Hilfe des Sheffer-Striches dar, d.h. finde Formeln, die immer wahr, bzw. immer falsch sind und nur aus dem Buchstaben p und dem Sheffer-Strich bestehen (und sehr(!) vielen Klammern natürlich).

d) Ist es möglich, die logischen Operatoren $\neg, \vee, \wedge, |, \mathbf{W}$ nur mit Hilfe des Implikationspfeiles $\Rightarrow$ und der falschen Aussage $\mathbf{F}$ darzustellen?

Aufgabe T2 (Die symmetrische Differenz)

Die *symmetrische Differenz* zweier Mengen A und B, bezeichnet durch $A \triangle B$, ist definiert durch

$$A \triangle B := (A \backslash B) \cup (B \backslash A).$$

a) Veranschauliche dir an einem geeigneten Diagramm (ohne exakten Beweis), dass für zwei Mengen A und B gilt:

$$A \triangle B = (A \cup B) \backslash (A \cap B).$$

b) Veranschauliche dir an einem geeigneten Diagramm (ohne exakten Beweis), dass die symmetrische Differenz assoziativ ist, d.h. dass für alle Mengen A, B, C gilt:

$$A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C.$$

c) Veranschauliche dir an einem geeigneten Diagramm (ohne exakten Beweis), dass der Durchschnitt distributiv über der symmetrische Differenz ist, d.h. dass für alle Mengen A, B, C gilt:

$$A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C).$$

d) Definiere einen logischen Operator $\oplus$, sodass für Mengen A und B die symmetrische Differenz gerade durch

$$A \triangle B = \{x : (x \in A) \oplus (x \in B)\}$$

gegeben ist:

p	q	$p \oplus q$
W	W	
W	F	
F	W	
F	F	

(dieser Operator wird oft mit ,,*XOR*" oder ,,*Exklusives Oder*" bezeichnet.)

e) Beweise die Assoziativität von $\oplus$ mit einer Wahrheitstafel. Folgt hieraus die Assoziativität des Mengenoperators $\triangle$?