Fachbereich Mathematik
AG 5: Funktionalanalysis
Prof. Dr. K.-H. Neeb
Dipl.-Math. Rafael Dahmen
Dipl.-Math. Stefan Wagner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2007 — 19. Juni 2007

Probeklausur zur Analysis I für M, Ph, LaG

Name: .... Matrikelnr.: ....

Vorname: .... Studiengang: ....

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	Summe
Erreichbar	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**50**
Erreicht						

Note

vor dem Abgeben bitte hier falten

Bitte füllen Sie den Kopf dieses Aufgabenblatts **jetzt** und **in Blockschrift (Großbuchstaben)** aus. Versehen Sie alle Blätter mit Ihrem Namen und nummerieren Sie sie fortlaufend. Falten Sie am Ende der Klausur dieses Blatt einmal entlang der Linie über diesem Absatz so, dass Ihr Name und die Punktetabelle sichtbar bleiben, und legen Sie Ihre Bearbeitung hinein.

Als Hilfsmittel zugelassen sind vier vorgeschriebene DIN A4 Seiten. Bücher aller Art, sowie Taschenrechner und Geräte zur elektronischen Kommunikation dürfen weder benutzt noch griffbereit gehalten werden.

Bedenken Sie, dass alle Ergebnisse zu begründen sind. Insbesondere werden Lösungswege bewertet, und Zwischenschritte müssen genau beschrieben werden. Viel Erfolg!

Aufgaben auf der Rückseite

Aufgaben der Probeklausur zur Analysis I

Aufgabe 1 (Aussagenlogik – 10 Punkte).

Gegeben sei folgende Aussage

$$(\forall z \in \mathbb{C})(\exists a \in \mathbb{C})\Big(a \neq z \text{ und } (\forall b \in \mathbb{C}) ab \neq 1\Big).$$

(a) Schreiben Sie die Aussage in Worten auf.

(b) Bilden Sie die Negation der Aussage.

(c) Entscheiden Sie, ob die Aussage wahr oder falsch ist, indem Sie entweder die Aussage oder ihre Negation beweisen.

Aufgabe 2 (Grenzwerte konkreter Folgen – 10 Punkte).

Untersuchen Sie die jeweilige komplexe Zahlenfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Beschränktheit, Konvergenz, Divergenz und bestimmte Divergenz.

(a) $x_n = \frac{(100n+1)^2}{25(n^2+n+1)}$

(b) $x_n = i^n + (-1)^n$

(c) $x_n = (\frac{3+4i}{5})^n$

(d) $x_n = \frac{n!}{2^n}$

Aufgabe 3 (Konvergenz von Reihen – 10 Punkte).
Entscheiden Sie bei jeder der folgenden Reihen, ob sie konvergiert:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n}\right)^9$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n+9}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{9n}\right)^n$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ mit $x_1 := 42$ und $x_{n+1} := \frac{3n+9}{9n+1} x_n$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^n}$

Aufgabe 4 (Metrische Räume – 10 Punkte).

(a) Sei X eine Menge und $f\colon X \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir definieren eine Funktion
$$d\colon X \times X \to [0,\infty[, \qquad d(x,y) := |f(x) - f(y)|.$$
Welche Eigenschaften muss f haben, damit d eine Metrik ist?

(b) Es sei (X,d) ein metrischer Raum. Weiterhin seinen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in X mit $x_n \to x$ und $y_n \to y$ für $x, y \in X$. Zeigen Sie, dass dann der Abstand der Grenzwerte gleich dem Grenzwert der Abstände der Folgenglieder ist, d.h. es gilt
$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x,y).$$

Aufgabe 5 (Rekursive Folgen und Induktion – 10 Punkte).

Die reelle Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch $y_1 := 0$, $y_{n+1} := \left(\frac{y_n}{2}\right)^2 + 1$

(a) Zeigen Sie, dass die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend ist.

(b) Nehmen Sie zusätzlich an, die Folge sei konvergent. Finden Sie den Grenzwert L.

(c) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion (ohne anzunehmen, dass $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert), dass die Folge nach oben beschränkt wird durch L.

(d) Warum folgt daraus nun die Konvergenz von $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen L?