5 Integralsätze

Das zentrale Resultat der Differential– und Integralrechnung für Funktionen von einer Veränderlichen ist der Hauptsatz, der besagt, dass

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(t)dt$$

für jede stetig differenzierbare Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$. Wir können diesen Satz betrachten als eine Beziehung zwischen den Werten von F auf dem Rand $\partial[a, b] = \{a, b\}$ von $[a, b]$ und den Werten von F' im Inneren von $[a, b]$. Thema dieses Kapitels sind Verallgemeinerungen dieser Beziehung. Die allgemeine Stokessche Formel

$$\int_{\partial M} w = \int_M dw,$$

die wir hier nicht behandeln, liefert eine weitreichende und elegante Verallgemeinerung des Hauptsatzes. Wir betrachten lediglich Spezialfälle dieser Formel: den Gaußschen Integralsatz, den Stokesschen Integralsatz im Raum und die Greensche Formel in der Ebene.

5.1 Kompakta mit glattem Rand

Der Gaußsche Integralsatz ist wohl das wichtigste Resultat der Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$. Er beschreibt den Zusammenhang zwischen dem Integral der Divergenz eines Vektorfeldes über einen Bereich im $\mathbb{R}^n$ und einem Oberflächenintegral über dem Rand des Bereiches. Wir beweisen ihn nur für spezielle Bereiche: *Kompakta mit glattem Rand*.

Definition 5.1 *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge (ein* Kompaktum*). Das Kompaktum A hat einen* glatten Rand*, wenn es zu jedem Randpunkt $p \in \partial A$ eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und eine stetig differenzierbare Funktion $\psi : U \to \mathbb{R}$ so gibt, dass*

(a) $A \cap U = \{x \in U : \psi(x) \leq 0\}$,

(b) $\psi'(x) \neq 0$ *für alle* $x \in U$.

Lemma 5.2 *In der Situation von Definition 5.1 gilt*

$$\partial A \cap U = \{x \in U : \psi(x) = 0\}.$$

Beweis Sei zunächst $x \in \partial A \cap U$. Da A kompakt ist, ist A abgeschlossen. Damit ist $x \in A$ und $\psi(x) \leq 0$. Wäre $\psi(x) < 0$, so wäre $\{y \in U : \psi(y) < 0\}$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, die in A liegt und x enthält. Das steht im Widerspruch zu $x \in \partial A$. Also ist $\psi(x) = 0$.

Sei nun $x \in U$ und $\psi(x) = 0$. Dann ist $x \in A$, und wir zeigen, dass x Randpunkt von A ist. Wegen $\psi'(x) \neq 0$ ist $\psi'(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ surjektiv. Es gibt also ein $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\psi'(x)v > 0$. Nun ist

$$0 < \psi'(x)v = \lim_{t \to 0} \frac{\psi(x + tv) - \psi(x)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\psi(x + tv)}{t}.$$

Es gibt also ein $\varepsilon > 0$ so, dass $\psi(x + tv) > 0$ für alle $t \in (0, \varepsilon)$. Folglich liegen für hinreichend großes n die Punkte $x + \frac{1}{n} v$ nicht in A. Es ist aber $x + \frac{1}{n} v \to x$ und daher $x \in \partial A$. ∎

Folgerung 5.3 *Der Rand eines Kompaktums mit glattem Rand ist eine $(n-1)$–dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.*

Beweis Nach Lemma 5.2 ist ∂A lokal die Nullstellenmenge der Funktion ψ, und 0 ist ein regulärer Wert von ψ. Die Behauptung folgt also aus dem Rangsatz (Satz 12.10 aus Analysis II). ∎

Für den Gaußschen Integralsatz benötigen wir das *Normalenfeld* von ∂A. Dazu definieren wir zunächst allgemein Tangential– und Normalvektoren.

Definition 5.4 *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k–dimensionale Untermannigfaltigkeit und $p \in M$.*

(a) *Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heißt* Tangentialvektor an M in p, *wenn ein $\varepsilon > 0$ und ein stetig differenzierbarer Weg $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(0) = v$ existieren. Die Menge aller Tangentialvektoren an M in p bezeichnen wir mit $T_p(M)$.*

(b) *Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heißt* Normalenvektor an M in p, *wenn er auf $T_p(M)$ senkrecht steht (d.h. wenn $\langle v, w \rangle = 0$ für alle $w \in T_p(M)$). Die Menge aller Normalenvektoren an M in p bezeichnen wir mit $N_p(M)$.*

Für den Tangentialraum $T_p(M)$ hat man die folgende Beschreibung.

Lemma 5.5 *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen und $\varphi : U \to M$ eine Karte von M. Dann ist*

$$T_{\varphi(x)}(M) = \operatorname{Im} \varphi'(x) \quad \textit{für alle } x \in U.$$

Beweis Sei $x \in U$ und $v \in \mathbb{R}^k$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ so, dass $x + tv \in U$ für alle t aus $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Wir betrachten den Weg

$$\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M, \quad t \mapsto \varphi(x + tv).$$

Für diesen ist $\gamma(0) = \varphi(x)$ und $\gamma'(0) = \varphi'(x)v$. Also ist $\operatorname{Im} \varphi'(x) \subseteq T_{\varphi(x)}(M)$. Für die umgekehrte Inklusion wählen wir wie im Beweis von Satz 4.4 eine offene Umgebung $W \subseteq U$ von x und einen Diffeomorphismus Φ auf $W \times \mathbb{R}^{n-k}$ so, dass

$\Phi^{-1}(\varphi(w)) = (w,0)$ für alle $w \in W$. Mit der Projektion $\pi : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^k$, $(x,y) \mapsto x$, haben wir dann $\pi(\Phi^{-1}(\varphi(w))) = w$ und $\varphi(\pi(\Phi^{-1}(\varphi(w)))) = \varphi(w)$ für alle $w \in W$. Sei nun $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ ein stetig differenzierbarer Weg mit $\gamma(0) = \varphi(x)$. Ist ε hinreichend klein, so ist $\gamma(t) \in \varphi(W)$ für alle $t \in (\varepsilon, \varepsilon)$ und folglich

$$\varphi\Big(\pi\big(\Phi^{-1}(\gamma(t))\big)\Big) = \gamma(t) \quad \text{für alle } t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Differentiation nach t an der Stelle $t = 0$ liefert $\varphi'(x)w = \gamma'(0)$ mit einem Vektor $w \in \mathbb{R}^k$. Also ist $\gamma'(0) \in \operatorname{Im} \varphi'(x)$ und damit $T_{\varphi(x)}(M) \subseteq \operatorname{Im} \varphi'(x)$. ■

Insbesondere stellen wir fest, dass $T_p(M)$ ein k–dimensionaler und $N_p(M)$ ein $(n-k)$–dimensionaler Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$ ist und dass

$$T_p(M) \oplus N_p(M) = \mathbb{R}^n.$$

Ist $M = \partial A$ der Rand eines Kompaktums mit glattem Rand, so ist $N_p(\partial A)$ für jeden Punkt $p \in M$ ein eindimensionaler reeller Vektorraum. Es gibt also genau zwei Normalenvektoren der Länge 1. Wir wollen denjenigen auszeichnen, der "nach außen zeigt".

Satz 5.6 *Sei A ein Kompaktum mit glattem Rand ∂A.*

(a) *Für jedes $p \in \partial A$ gibt es genau einen Vektor $\nu(p) \in N_p(\partial A)$ der Länge 1 mit folgender Eigenschaft: Es gibt ein $\varepsilon > 0$ so, dass $p + t\nu(p) \notin A$ für alle $t \in (0, \varepsilon)$.*

(b) *Die Abbildung $\nu : \partial A \to \mathbb{R}^n$ ist stetig.*

Der Vektor $\nu(p)$ heißt *der äußere Normalenvektor an ∂A in p*, und ν heißt das *äußere Normalenfeld von A*.

Beweis *Existenz eines äußeren Normalenvektors*: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Umgebung von p und $\psi : U \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $\psi'(p) \neq 0$ und $U \cap A = \{x \in U : \psi(x) \leq 0\}$. Wir zeigen, dass

$$\nu(p) := \frac{1}{\|(\operatorname{grad}\psi)(p)\|_2} (\operatorname{grad}\psi)(p) \tag{5.1}$$

ein äußerer Normalenvektor ist. Ist $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \partial A$ ein Weg mit $\gamma(0) = p$ und ist ε so klein, das $\gamma(t) \in U$ für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, so ist nach Lemma 5.2

$$\psi\Big(\gamma(t)\Big) = 0 \quad \text{für alle } t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Differentiation nach t an der Stelle $t = 0$ liefert $\psi'(p)\gamma'(0) = 0$. Folglich steht der Vektor $(\operatorname{grad}\psi)(p)$ und damit auch $\nu(p)$ senkrecht auf $T_p(\partial A)$. Klar ist auch $\|\nu(p)\|_2 = 1$. Die außerdem geforderte Eigenschaft folgt wegen

$$\psi'(p)\Big(\nu(p)\Big) = \frac{\langle (\operatorname{grad}\psi)(p), (\operatorname{grad}\psi)(p)\rangle}{\|(\operatorname{grad}\psi)(p)\|_2} = \|(\operatorname{grad}\psi)(p)\|_2$$

wie im Beweis von Lemma 5.2.

Eindeutigkeit des äußeren Normalenvektors: Wir haben bereits bemerkt, dass es genau zwei Normalenvektoren der Länge 1 gibt und dass einer davon der Vektor $\nu(p)$ aus (5.1) ist. Wie im Beweis von Lemma 5.2 sieht man nun, dass $\psi(a - t\nu(p)) < 0$ für $t > 0$ hinreichend nahe bei Null. Also ist $a - t\nu(p) \in A$ für solche t, d.h. der Vektor $-\nu(p)$ erfüllt nicht die zusätzliche Bedingung aus (a).

Stetigkeit von ν: Diese folgt sofort aus Darstellung (5.1). ∎

Beispiel 1 Sei $r > 0$. Die Kugel $A := \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_2 \le r\}$ ist ein Kompaktum mit glattem Rand, denn die Funktion $\psi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|_2^2 - r^2$, hat die gewünschten Eigenschaften. Für $p \in \partial A$ ist $(\operatorname{grad}\psi)(p) = 2p$, und damit ist wegen (5.1) der Vektor $\nu(p) = \frac{2}{\|2p\|}\, p = \frac{1}{r}\, p$ der zugehörige Normalenvektor. ∎

Beispiel 2 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ eine injektive Immersion. Wir interessieren uns für die Normalenvektoren an die Fläche $\psi(U)$. Für $x \in U$ haben wir $T_{\varphi(x)}(\varphi(U)) = \operatorname{Im}\varphi'(x)$, und da φ eine Immersion ist, ist dies ein zweidimensionaler Unterraum von $\mathbb{R}^3$. Es gibt im Punkt $\varphi(x)$ also genau 2 Normalenvektoren der Länge 1. Wir legen einen Normalenvektor $\nu(\varphi(x))$ dadurch fest, dass wir

$$\det\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x), \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(x), \nu(\varphi(x))\Big) > 0$$

verlangen, d.h. die Vektoren

$$X_1(p) := \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x), \quad X_2(p) := \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(x) \quad \text{und } \nu\Big(\varphi(x)\Big)$$

sollen ein Rechtssystem bilden. Mit dieser Information können wir $\nu(\varphi(x))$ direkt berechnen:

$$\nu\Big(\varphi(x)\Big) = \frac{X_1(p) \times X_2(p)}{\|X_1(p) \times X_2(p)\|},$$

wobei $v \times w$ das *Vektorprodukt* der Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^3$ ist, d.h.

$$v \times w = \det\begin{pmatrix} e_1 & v_1 & w_1 \\ e_2 & v_2 & w_2 \\ e_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2w_3 & - & v_3w_2 \\ v_3w_1 & - & v_1w_3 \\ v_1w_2 & - & v_2w_1 \end{pmatrix}.$$

Ist speziell φ gegeben durch eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$, d.h. ist $\varphi(x) = (x, f(x))$, so ist

$$X_1(p) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x) \end{pmatrix}, \qquad X_2(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x) \end{pmatrix},$$

also

$$X_1(p) \times X_2(p) = \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ -\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x) \\ 1 \end{pmatrix},$$

und daher

$$\nu(p) = \nu\Big(\varphi(x)\Big) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\partial f}{\partial x_1}(x))^2 + (\frac{\partial f}{\partial x_2}(x))^2}} \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ -\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

In diesem Fall ist $\nu(\varphi(x))$ der obere Normalenvektor an den Graphen von f. ■

Beispiel 3 In diesem Beispiel geht es darum, den Rand eines Kompaktums mit glattem Rand lokal als Graphen einer Funktion g darzustellen und den äußeren Normalenvektor mit Hilfe von g zu beschreiben. Die Details sollen Sie sich im Tutorium anschauen.

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit glattem Rand und $p \in \partial A$. Wir wählen eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von p und eine stetig differenzierbare Funktion $\psi : U \to \mathbb{R}$ mit $A \cap U = \{x \in U : \psi(x) \leq 0\}$ und $\psi'(x) \neq 0$ für alle $x \in U$. Nach Lemma 5.2 ist dann

$$\partial A \cap U = \{x \in U : \psi(x) = 0\}.$$

Wegen $\psi'(p) \neq 0$ dürfen wir o.E.d.A. annehmen, dass $\frac{\partial \psi}{\partial x_n}(p) \neq 0$ ist. Mit dem Satz über implizite Funktionen finden wir dann eine offene Menge $U_1 \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$, eine stetig differenzierbare Funktion $g : U_1 \to \mathbb{R}$ und ein Intervall (b, c) mit $V := U_1 \times (b, c) \subseteq U$ so, dass

$$\partial A \cap \Big(U_1 \times (b, c)\Big) = \Big\{(x, g(x)) \in \mathbb{R}^n : x \in U_1\Big\},$$

d.h. $\partial A \cap V$ ist der Graph von g. Ist $\frac{\partial \psi}{\partial x_n}(p) > 0$, so ist

$$A \cap \Big(U_1 \times (b, c)\Big) = \Big\{x \in V : x_n \leq g(x')\Big\},$$

wobei wir $x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ geschrieben haben, und es ist weiter

$$\nu(p) = \frac{(-(\operatorname{grad} g)(p'), 1)}{\sqrt{1 + \|(\operatorname{grad} g)(p')\|_2^2}} \tag{5.2}$$

mit $p = (p', p_n)$. ■

Schließlich vermerken wir eine weitere Eigenschaft kompakter Mengen. Wir erinnern daran, dass der *Durchmesser* einer Teilmenge M eines metrischen Raumes (X, d) durch

$$\operatorname{diam} M := \sup\{d(x, y) : x, y \in M\}$$

definiert ist.

Satz 5.7 (Lebesguesches Überdeckungslemma) *Sei K eine kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes (X, d) und $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von K. Dann gibt es ein $\lambda > 0$ (eine sogenannte* Lebesguesche Zahl der Überdeckung*) so, dass jede Teilmenge M von X mit* $\operatorname{diam} M \leq \lambda$ *und $M \cap K \neq \emptyset$ in einer der Mengen U_i enthalten ist.*

Beweis Zu jedem Punkt $k \in K$ gibt es ein $i \in I$ mit $k \in U_i$. Da U_i offen ist, findet man ein $\varepsilon(k) > 0$ mit $U_{2\varepsilon(k)}(k) \subseteq U_i$. Nun bildet die Familie $(U_{\varepsilon(k)}(k))_{k \in K}$ eine offene Überdeckung von K. Da K kompakt ist, lässt sich daraus eine endliche Teilüberdeckung auswählen, d.h. es gibt Punkte $k_1, \ldots, k_m \in K$ mit

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} U_{\varepsilon(k_j)}(k_j).$$

Wir setzen $\lambda := \min(\varepsilon(k_1), \ldots, \varepsilon(k_m))$. Sei nun $M \subseteq X$ eine Teilmenge mit $M \cap K \neq \emptyset$ und $\operatorname{diam} M \leq \lambda$. Dann gibt es ein $x \in K$ mit $x \in M \cap K$, und es gibt ein j mit $d(x, k_j) < \varepsilon(k_j)$. Für jedes $y \in M$ ist dann

$$d(y, k_j) \leq d(y, x) + d(x, k_j) < \lambda + \varepsilon(k_j) \leq 2\varepsilon(k_j),$$

d.h. $M \subseteq U_{2\varepsilon(k_j)}(k_j)$. Nach Konstruktion ist aber jede der Kugeln $U_{2\varepsilon(k)}(k)$ (und damit auch die Menge M) in einer der Mengen U_i enthalten. ■

5.2 Der Gaußsche Integralsatz

Zur Erinnerung: Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $F : U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, so heißt

$$\operatorname{div} F : U \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_j}{\partial x_j}(x)$$

die *Divergenz desVektorfeldes F.*

Satz 5.8 (Gaußscher Integralsatz) *Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit glattem Rand, $\nu : \partial A \to \mathbb{R}^n$ das äußere Normalenfeld und $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, die A umfasst. Dann gilt für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld $F : U \to \mathbb{R}^n$*

$$\int_A \operatorname{div} F d\lambda_n = \int_{\partial A} \langle F(x), \nu(x) \rangle dS_{\partial A}(x). \tag{5.3}$$

Der Gaußsche Integralsatz gilt auch noch für Kompakta, deren Rand niedrigdimensionale Singularitäten wie Ecken und Kanten aufweist. Auch die Voraussetzung, dass F auf einer ganzen Umgebung von A definiert ist, lässt sich abschwächen.

Da $\nu(x)$ ein Einheitsvektor ist, haben wir $\langle F(x), \nu(x)\rangle = \|F(x)\| \cdot \cos\alpha(x)$, wobei $\alpha(x) \in [0, \pi]$ der Winkel zwischen $F(x)$ und $\nu(x)$ ist. Es ist also $\langle F(x), \nu(x)\rangle$ die Länge der orthogonalen Projektion von $F(x)$ auf $\nu(x)$. Ein Physiker stellt sich $\langle F(x), \nu(x)\rangle dS(x)$ als den durch das Oberflächenelement $dS(x)$ austretenden Fluss des Vektorfeldes F vor. Demzufolge wird das Integral

$$\int_{\partial A} \langle F(x), \nu(x)\rangle dS(x)$$

als Gesamtfluss durch die Oberfläche von A interpretiert. Ist das Vektorfeld F *divergenzfrei* (oder auch *quellenfrei*), d.h. ist $\operatorname{div} F = 0$, so ergibt sich

$$\int_{\partial A} \langle F(x), \nu(x)\rangle dS(x) = 0,$$

d.h. der Gesamtfluss durch den Rand des Kompaktums verschwindet. Diese Situation tritt z.B. auf, wenn F den Fluss einer inkompressiblen Flüssigkeit beschreibt. Die Inkompressibilität entspricht der Bedingung $\operatorname{div} F = 0$. Das Verschwinden des Gesamtflusses durch ∂A kann man sich in diesem Fall so veranschaulichen, dass ja die Flüssigkeitsmenge, die sich innerhalb von A befindet, wegen der Inkompressibilät dem Volumen von A entspricht, also konstant ist. Daher ist die Flüssigkeitsbilanz in A ausgewogen: zu jedem Zeitpunkt fließt gleichviel rein wie raus.

Wir bereiten den Beweis des Gaußschen Integralsatzes vor, indem wir einige weitere Werkzeuge bereitstellen und zwei Lemmas beweisen, die Spezialfälle behandeln und die Teile des eigentlichen Beweises vorwegnehmen.

Zunächst einige Begriffe. Sei M ein metrischer Raum und $f : M \to \mathbb{R}$ stetig. Die Menge

$$\operatorname{supp} f := \operatorname{clos}\Big\{x \in M : f(x) \neq 0\Big\}$$

heißt der *Träger* von f. Wir schreiben $C(M)$ für den Raum der stetigen reellwertigen Funktionen auf M und $C_0(M)$ für den Raum der Funktionen aus $C(M)$, deren Träger kompakt ist. Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, so bezeichne $C_0^k(U)$ den Raum der k–mal stetig diffenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger in U. Beachten Sie: $f \in C(\mathbb{R}^n)$ liegt genau dann in $C_0(\mathbb{R}^n)$, wenn $\operatorname{supp} f$ beschränkt ist (da Träger per Definition abgeschlossen sind), und $f \in C((a, b))$ liegt genau dann in $C_0((a, b))$, wenn es ein $\varepsilon > 0$ so gibt, dass $\operatorname{supp} f \subseteq (a + \varepsilon, b - \varepsilon)$.

Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C_0^k(U)$, so liegt die durch

$$F(x) := \begin{cases} f(x) & x \in U \\ 0 & x \neq U \end{cases}$$

definierte *Fortsetzung von f durch* 0 in $C_0^k(\mathbb{R}^n)$. Ist nämlich $x \in U$, so stimmen f und F in einer Umgebung von x überein. Ist dagegen $x \neq U$, so ist $x \neq \operatorname{supp} f$, und da $\operatorname{supp} f$ abgeschlossen ist, ist das Komplement dieser Menge offen, und F verschwindet auf einer Umgebung von x.

Wir betrachten die Funktion

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \begin{cases} \exp\Big(-\dfrac{1}{1-t^2}\Big) & \text{für } |t| < 1 \\ 0 & \text{für } |t| \geq 1. \end{cases}$$

Diese ist beliebig oft differenzierbar (Nachweis), und ihr Träger ist $[-1, 1]$ (so dass $g \in C_0^\infty(\mathbb{R})$). Da g einen kompakten Träger hat, ist die Funktion

$$G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(t-k)$$

wohldefiniert (für jedes t hat die Reihe nur endlich viele Summanden ungleich Null). Nun ist klar, dass G positiv, 1–periodisch und beliebig oft differenzierbar ist. Also wird auch durch $h(t) := g(t)/G(t)$ eine Funktion aus $C_0^\infty(\mathbb{R})$ definiert. Für diese ist $\operatorname{supp} h = [-1, 1]$ und

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} h(t-k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{g(t-k)}{G(t-k)} = \frac{1}{G(t)} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(t-k) = \frac{G(t)}{G(t)} = 1.$$

Für $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{Z}^n$ und $\varepsilon > 0$ definieren wir nun $a_{p,\varepsilon} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ durch

$$a_{p,\varepsilon}(x) := \prod_{j=1}^n h(x_j/\varepsilon - p_j).$$

Dann ist $\operatorname{supp} a_{p,\varepsilon} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - \varepsilon p\|_\infty \leq \varepsilon\}$, und man hat

$$\sum_{p \in \mathbb{Z}^n} a_{p,\varepsilon}(x) = 1 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^n.$$

Die Familie $(a_{p,\varepsilon})_{p \in \mathbb{Z}^n}$ heißt eine *glatte Zerlegung der Eins*. Nun zu den angekündigten Lemmas.

Lemma 5.9 *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $1 \leq j \leq n$. Dann gilt*

(a) $\int_U \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\, d\lambda_n = 0$ *für alle $\varphi \in C_0^1(U)$.*

(b) $\int_U \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\,\psi d\lambda_n = -\int_U \varphi\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\,d\lambda_n$ *für alle* $\varphi \in C_0^1(U)$ *und* $\psi \in C^1(U)$.

Beweis Wir dürfen o.E.d.A. $U = \mathbb{R}^n$ annehmen, da wir ψ durch 0 zu einer Funktion in $C_0^1(\mathbb{R}^n)$ fortsetzen können.

Da $\operatorname{supp}\varphi$ kompakt ist, gibt es ein $R > 0$ mit $\operatorname{supp}\varphi \subseteq [-R,R]^n$. Insbesondere verschwindet φ auf dem Rand des Würfels $[-R,R]^n$. Sei nun z.B. $j = 1$ (für die übrigen j verläuft der Beweis analog). Für jedes $x = (x_1,\dots,x_n) \in U$ ist dann

$$\int_{-R}^{R} \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x)dx_1 = \varphi(R,x_2,\dots,x_n) - \varphi(-R,x_2,\dots,x_n) = 0.$$

Mit dem Satz von Fubini erhalten wir daher

$$\begin{aligned}\int_U \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x)d\lambda_n(x) &= \int_{[-R,R]^n} \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x)d\lambda_n(x)\\ &= \int_{[-R,R]^{n-1}} \int_{-R}^{R} \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x)dx_1\, d\lambda_{n-1}(x_2,\dots,x_n) = 0.\end{aligned}$$

Das liefert Aussage (a), und für (b) wenden wir (a) auf die Funktion $\varphi\psi \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ an. Die Behauptung folgt dann aus der Produktregel

$$\frac{\partial(\varphi\psi)}{\partial x_j} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\,\psi + \varphi\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\,.$$

■

Lemma 5.10 *Sei* $U' \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ *offen,* $I = (\alpha,\beta) \subset \mathbb{R}$ *und* $g : U' \to I$ *stetig differenzierbar. Wir setzen*

$$A := \Big\{(x',x_n) \in U' \times I : x_n \le g(x')\Big\} \text{ und } M := \Big\{(x',x_n) \in U' \times I : x_n = g(x')\Big\}.$$

Dann gilt für jede Funktion $f \in C_0^1(U' \times I)$ *und jedes* $j \in \{1,\dots,n\}$

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)d\lambda_n(x) = \int_M f(x)\nu_j(x)dS_M(x),$$

wobei $\nu_j(x)$ *die* j*. Komponente des Normalenvektors*

$$\nu(x) := \frac{(-(\operatorname{grad} g)(x'),1)}{\sqrt{1+\|(\operatorname{grad} g)(x')\|_2^2}} \quad \text{mit } x = (x',x_n) \tag{5.4}$$

ist (beachte Beispiel 2 in Abschnitt 5.1).

Beweis Wir erinnern zunächst daran, dass das Oberflächenmaß von M bezüglich der Parametrisierung $x' \mapsto (x', g(x'))$ gegeben ist durch

$$dS_M(x') = \sqrt{1+\|(\operatorname{grad} g)(x')\|_2^2}\; d\lambda_{n-1}(x') \tag{5.5}$$

(vgl. Beispiel 2 aus Abschnitt 4.3). Wir unterscheiden nun zwei Fälle.

Fall 1: Sei $1 \le j < n$. Für die Funktion

$$F : U' \times I \to \mathbb{R}, \quad (x', z) \mapsto \int_\alpha^z f(x', x_n) dx_n$$

gilt nach Satz 2.20

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x', z) = f(x', z) \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial x_j}(x', z) = \int_\alpha^z \frac{\partial f}{\partial x_j}(x', x_n) dx_n.$$

Hieraus folgt mit der Kettenregel

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \int_\alpha^{g(x')} f(x', x_n) dx_n &= \frac{\partial}{\partial x_j} F\Big(x', g(x')\Big) \\ &= \frac{\partial F}{\partial z}\Big(x', g(x')\Big) \frac{\partial g}{\partial x_j}(x') + \frac{\partial F}{\partial x_j}\Big(x', g(x')\Big) \\ &= f\Big(x', g(x')\Big) \frac{\partial g}{\partial x_j}(x') + \int_\alpha^{g(x')} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x', x_n) dx_n. \end{aligned}$$

Da die Funktion $x' \mapsto \int_\alpha^{g(x')} f(x', x_n) dx_n$ einen kompakten Träger hat (warum?), folgt aus Lemma 5.9 (a)

$$\int_{U'} \frac{\partial}{\partial x_j} \int_\alpha^{g(x')} f(x', x_n) dx_n d\lambda_{n-1}(x') = 0.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} &\int_A \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) d\lambda_n(x) = \int_{U'} \int_\alpha^{g(x')} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x', x_n) dx_n d\lambda_{n-1}(x') \\ &= \int_{U'} \frac{\partial}{\partial x_j} \int_\alpha^{g(x')} f(x', x_n) dx_n d\lambda_{n-1}(x') - \int_{U'} f\Big(x', g(x')\Big) \frac{\partial g}{\partial x_j}(x') d\lambda_{n-1}(x') \\ &= \int_M f(x) \nu_j(x) dS_M(x) \end{aligned}$$

wegen (5.4), (5.5) und der Definition des Oberflächenintegrals.

Fall 2: Sei $j = n$. Da für jedes $x' \in U'$ die Funktion $x_n \mapsto f(x', x_n)$ einen kompakten Träger hat, folgt aus dem Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung

$$\int_\alpha^{g(x')} \frac{\partial f}{\partial x_n}(x', x_n) dx_n = f\Big(x', g(x')\Big),$$

also wieder

$$\begin{aligned}\int_A \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)d\lambda_n(x) &= \int_{U'}\int_\alpha^{g(x')} \frac{\partial f}{\partial x_n}(x',x_n)dx_n d\lambda_{n-1}(x') \\ &= \int_{U'} f\Big(x', g(x')\Big)d\lambda_{n-1}(x') = \int_M f(x)\nu_n(x)dS_M(x).\end{aligned}$$

Damit ist der Beweis vollständig. ∎

Beweis des Gaußschen Integralsatzes Wir haben in Beispiel 3 aus Abschnitt 5.1 gesehen, dass jeder Punkt $a \in \partial A$ eine Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ hat, in der sich ∂A als Graph einer Funktion darstellen lässt und $A \cap U$ als die Menge der Punkte, die unter diesem Graphen liegen. Es existiert deshalb eine Familie $(U_j)_{j\in J}$ offener Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ mit $A \subseteq \cup_{j\in J} U_j$, so dass jedes U_j *eine* der folgenden Bedingungen erfüllt:

(i) $U_j \subseteq A \setminus \partial A = \operatorname{int} A$.

(ii) Nach eventueller Umnummerierung der Koordinaten hat U_j die Gestalt $U_j = U' \times (a,b)$, wobei $U' \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ offen ist und eine stetig differenzierbare Funktion $g : U' \to \mathbb{R}$ existiert, so dass

$$U_j \cap A = \Big\{(x', x_n) \in U' \times (a,b) : x_n \leq g(x')\Big\}.$$

Sei λ eine Lebesguesche Zahl der Überdeckung $(U_j)_{j\in J}$ des Kompaktums A (vgl. Satz 5.7) und $\varepsilon := \frac{\lambda}{2\sqrt{n}}$. Zu diesem ε betrachten wir die oben konstruierte glatte Zerlegung der Eins $(a_{p,\varepsilon})_{p\in\mathbb{Z}}$. Der Träger jeder Funktion $a_{p,\varepsilon}$ ist ein Würfel der Seitenlänge 2ε und hat somit den Durchmesser $2\varepsilon\sqrt{n} = \lambda$. Jeder Träger $\operatorname{supp} a_{p,\varepsilon}$ ist also in einer der Mengen U_j enthalten (Satz 5.7). Sei

$$P := \{p \in \mathbb{Z}^n : \operatorname{supp} a_{p,\varepsilon} \cap A \neq \emptyset\}.$$

Da A beschränkt ist, ist P eine endliche Menge. Wir benutzen nun die Zerlegung der Eins, um dem Gaußschen Integralsatz auf die Fälle zurückzuführen, wo sich alles in einer der Mengen U_j abspielt. Nun ist

$$\int_A \operatorname{div} F d\lambda_n = \int_A \operatorname{div}\Big(\sum_{p\in P} a_{p,\varepsilon}F\Big)d\lambda_n = \sum_{p\in P}\int_A \operatorname{div}(a_{p,\varepsilon}F)d\lambda_n$$

und analog

$$\int_{\partial A} \big\langle F(x), \nu(x)\big\rangle dS_{\partial A}(x) = \sum_{p\in P}\int_{\partial A} \big\langle (a_{p,\varepsilon}F)(x), \nu\big\rangle dS_{\partial A}(x).$$

Wir müssen daher den Satz für jede der Funktionen $a_{p,\varepsilon}F$ zeigen. Gemäß unserer Konstruktion ist für jedes $p \in \mathbb{Z}^n$ der Träger von $a_{p,\varepsilon}$ in einer der Mengen U_j enthalten. Ist $U_j \subseteq \operatorname{int} A$, so ist

$$\int_{\partial A} \big\langle (a_{p,\varepsilon}F)(x), \nu(x) \big\rangle dS_{\partial A}(x) = 0,$$

da $a_{p,\varepsilon}$ auf ∂A verschwindet. Die Behauptung folgt in diesem Fall aus

$$\int_A \operatorname{div}(a_{p,\varepsilon}F) d\lambda_n = \int_{U_j} \operatorname{div}(a_{p,\varepsilon}F) d\lambda_n = \sum_{i=1}^n \int_{U_j} \frac{\partial(a_{p,\varepsilon}F)}{\partial x_j} d\lambda_n = 0$$

nach Lemma 5.9 (a). Genügt dagegen U_j der Bedingung (ii), so folgt die Behauptung durch Anwendung von Lemma 5.10 auf die Komponentenfunktionen $f := a_{p,\varepsilon}F_i$, $i = 1, \ldots, n$, von $a_{p,\varepsilon}F$ und durch Summation. ■

Anwendung 1: Oberfläche der Einheitssphäre. Für das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto x$ ist $(\operatorname{div} F)(x) = n$. Aus dem Gaußschen Integralsatz folgt daher für jedes Kompaktum A mit glattem Rand

$$n \operatorname{vol}_n(A) = \int_A \operatorname{div} F d\lambda_n = \int_{\partial A} \big\langle x, \nu(x) \big\rangle dS_{\partial A}(x),$$

also

$$\operatorname{vol}_n(A) = \frac{1}{n} \int_{\partial A} \big\langle x, \nu(x) \big\rangle dS_{\partial A}(x).$$

Ist speziell A die n–dimensionale Einheitskugel B_n, so ist ∂B_n die $(n-1)$–dimensionale Einheitssphäre $\mathbb{S}^{n-1}$. Weiter ist $\nu(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ und daher

$$c_n = \operatorname{vol}_n(B_n) = \frac{1}{n} \int_{\partial A} \|x\|^2 dS_{\partial A}(x) = \frac{1}{n} \int_{\partial A} dS_{\partial A}(x) = \frac{w_n}{n}.$$

Wir erhalten also erneut die Beziehung $w_n = nc_n$, die wir bereits früher abgeleitet hatten. ■

Anwendung 2: Die Greensche Formel. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $A \subseteq U$ ein Kompaktum mit glattem Rand und ν das äußere Normalenfeld von A. Für eine stetig differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ definieren wir die *Ableitung in Normalenrichtung im Punkt* $a \in \partial A$ durch

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(a) := \big\langle (\operatorname{grad} f)(a), \nu(a) \big\rangle = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \nu_j(a).$$

Weiter definieren wir für $f \in C^2(U)$

$$\Delta f := \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$$

und nennen Δ den *Laplace–Operator*.

Lemma 5.11 *Für $f, g \in C^2(U)$ und $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ gilt*

(a) $\quad \operatorname{div}(fF) = f \operatorname{div} F + \langle \operatorname{grad} f, F \rangle.$

(b) $\quad \operatorname{div}(\operatorname{grad} F) = \Delta f.$

Der Beweis erfolgt durch Nachrechnen und ist Hausaufgabe.

Satz 5.12 (Greensche Formel) *Für $f, g \in C^2$ und A wie oben gilt*

$$\int_A (f\Delta g - g\Delta f) d\lambda_n = \int_{\partial A} \Big(f \frac{\partial g}{\partial \nu} - g \frac{\partial f}{\partial \nu} \Big) dS_{\partial A}.$$

Beweis Wir wenden den Gaußschen Integralsatz auf das Vektorfeld $F := f \operatorname{grad} g - g \operatorname{grad} f$ an und erhalten mit Lemma 5.11

$$\begin{aligned} \operatorname{div} F &= \operatorname{div}(f \operatorname{grad} g) - \operatorname{div}(g \operatorname{grad} f) \\ &= f \operatorname{div}(\operatorname{grad} g) + \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g \rangle - g \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) \\ &\quad - \langle \operatorname{grad} g, \operatorname{grad} f \rangle = f\Delta g - g\Delta f. \end{aligned}$$

Auf ∂A ergibt sich

$$\langle F, \nu \rangle = f \langle \operatorname{grad} g, \nu \rangle - g \langle \operatorname{grad} f, \nu \rangle = f \frac{\partial g}{\partial \nu} - g \frac{\partial f}{\partial \nu},$$

und die Behauptung folgt nun aus dem Gaußschen Integralsatz. ■

5.3 Der Greensche Integralsatz in der Ebene

Wir sehen uns nun den Gaußschen Integralsatz für $n = 2$ genauer an. Der Rand eines Kompaktums mit glattem Rand im $\mathbb{R}^2$ ist eine Kurve, und wir wollen daher versuchen, das Randintegral aus dem Gaußschen Satz als ein Wegintegral über eine Pfaffsche Form zu interpretieren.

Sei also $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Kompaktum mit glattem Rand. Dann ist ∂A eine kompakte 1–dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$. Wir können ∂A also in endlich viele Stücke zerlegen, die wir jeweils durch Karten (= injektive Wege, die Immersionen sind) $\gamma_j : (a_j, b_j) \to \partial A$ parametrisieren können (Parametrisierungssatz).

Wir wollen nur solche Wege γ_j betrachten, die für A links der Kurve $\gamma_j((a_j, b_j))$ liegt. Das soll für einen solchen Weg $\gamma : (a, b) \to \partial A$ folgendes bedeuten: Wir verlangen, dass der Normalenvektor $\nu(\gamma(t))$ im Randpunkt $\gamma(t)$ durch

$$\nu\Big(\gamma(t)\Big) := \frac{1}{\|\dot\gamma(t)\|_2} \begin{pmatrix} \gamma_2'(t) \\ -\gamma_1'(t) \end{pmatrix} \tag{5.6}$$

gegeben ist. Dann ist nämlich

$$\det\Big(\nu(\gamma(t)), \dot\gamma(t)\Big) = \frac{\|\dot\gamma(t)\|_2^2}{\|\dot\gamma(t)\|_2} = \|\dot\gamma(t)\|_2 > 0,$$

d.h. die Normale $\nu(\gamma(t))$ und die Tangente $\dot\gamma(t)$ bilden ein Rechtssystem.

Sind alle Wege γ_j so orientiert, und überlappen sich zwei Bereiche $\gamma_i((a_i, b_i))$ und $\gamma_j((a_j, b_j))$, so ist die zugehörige Parametertransformation

$$\varphi_{ij} : U_{ij} := \gamma_j^{-1}\Big(\gamma_i((a_i, b_i))\Big) \to \gamma_i^{-1}\Big(\gamma_j((a_j, b_j))\Big) =: U_{ji}$$

streng monoton wachsend. Wegen $\gamma_j \circ \varphi_{ij} = \gamma_i$ ist nämlich

$$\gamma_i'(t) = (\gamma_j \circ \varphi_{ij})'(t) = \gamma_j'\Big(\varphi_{ij}(t)\Big)\varphi_{ij}'(t),$$

und da γ_i' und γ_j' wegen unserer Wahl (5.6) in die gleiche Richtung zeigen, ist $\varphi_{ij}'(t) > 0$. Für jede stetige Pfaffsche Form w auf einer offenen Umgebung von A ist daher

$$\int_{\gamma_j \circ \varphi_{ij}} w = \int_{\gamma i} w.$$

Wir definieren nun wie in Kapitel 4

$$\int_{\partial A} w := \sum_{j=1}^{k} \int_{I_j} \big\langle w(\gamma_j(t)), \gamma_j'(t)\big\rangle dt,$$

wobei die Intervalle $I_j \subseteq (a_j, b_j)$ so gewählt sind, dass $\partial A = \cup_{j=1}^{k} \gamma_j(I_j)$ und dass die Kurven $\gamma_j(I_j), j = 1, \ldots, k$, paarweise disjunkt sind. Ähnlich wie in Lemma 4.8 sieht man ein, dass dieses Integral nicht von den gewählten Wegen γ_j bzw. Mengen I_j abhängt.

Satz 5.13 *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $A \subseteq U$ ein Kompaktum mit glattem Rand. Für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld $F : U \to \mathbb{R}^2$ gilt dann*

$$\int_A \operatorname{div} F d\lambda_2 = \int_{\partial A} F_1 dx_2 - F_2 dx_1.$$

Beweis Wegen des Gaußschen Integralsatzes ist noch zu zeigen, dass

$$\int_{\partial A} F_1 dx_2 - F_2 dx_1 = \int_{\partial A} \langle F(x), \nu(x)\rangle dS_{\partial A}(x). \tag{5.7}$$

Dazu verwenden wir eine Karte $\gamma : (a, b) \to \partial A$, wie wir sie oben diskutiert haben, und berechnen die beiden Integrale. Zunächst ist

$$\int_\gamma F_1 dx_2 - F_2 dx_1 = \int_a^b \Big(F_1(\gamma(t))\gamma_2'(t) - F_2(\gamma(t))\gamma_1'(t)\Big)dt$$

das Integral auf der linken Seite. Wegen (5.6) ist der Integrand des zugehörigen Teiles des rechten Integrals

$$\int_{\gamma((a,b))} \big\langle F(x), \nu(x)\big\rangle dS_{\partial A}(x) = \int_a^b \big\langle F(\gamma(t)), \nu(\gamma(t))\big\rangle \|\dot\gamma(t)\|_2 dt$$

gegeben durch

$$\begin{aligned}\Big\langle F(\gamma(t)), \nu(\gamma(t))\Big\rangle \|\dot\gamma(t)\|_2 &= \Big\langle F(\gamma(t)), \begin{pmatrix} \gamma_2'(t) \\ -\gamma_1'(t)\end{pmatrix}\Big\rangle \\ &= F_1(\gamma(t))\gamma_2'(t) - F_2(\gamma(t))\gamma_1'(t).\end{aligned}$$

Da beide Integrale übereinstimmen, folgt (5.7) und die Behauptung. ■

5.4 Der Stokessche Integralsatz im Raum

In diesem letzten Abschnitt betrachten wir einen einfachen Spezialfall des allgemeinen Stokeschen Satzes. In vielen Anwendungen tritt das Problem auf, den Fluss eines Vektorfeldes durch eine geschlossene Kurve im Raum zu berechnen. Wir wollen zunächst diese Begriffe präzisieren. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ eine injektive Immersion, die eine Einbettung ist. Dann ist $M := \varphi(U)$ eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$. Sei nun $A \subseteq U$ ein Kompaktum mit glattem Rand. Dann ist $G := \varphi(A) \subseteq M$ eine kompakte Menge, die von der Kurve $\partial G = \varphi(\partial A)$ berandet wird. Wir definieren *den Fluss eines stetigen Vektorfeldes F durch die Kurve ∂G* als das Integral

$$\int_G \Big\langle F(x), \nu(x)\Big\rangle dS_M(x), \tag{5.8}$$

wobei wir die Richtung des Normalenvektors so festlegen, dass

$$\det\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(p), \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(p), \nu(\varphi(p))\Big) > 0$$

gilt. Man beachte, dass wir dem anschaulichen Konzept des Flusses eines Vektorfeldes durch eine geschlossene Kurve im Raum dadurch einen mathematischen Sinn gegeben haben, indem wir "in diese Kurve eine Fläche $G = \varphi(A)$ eingespannt" haben und den Fluss durch (5.8), also als "Fluss durch eine Fläche" definiert haben.

Wir zeigen nun, dass für spezielle Felder (Rotationsfelder) das Integral (5.8) tatsächlich nur von der Randkurve ∂G abhängt, und stellen das Integral (5.8) als Kurvenintegral über diesem Rand dar.

Zur Erinnerung: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und $F : U \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Wir definieren ein neues Vektorfeld $\operatorname{rot} F : U \to \mathbb{R}^3$, die *Rotation* von F, durch

$$\operatorname{rot} F = \det\begin{pmatrix} e_1 & \frac{\partial}{\partial x_1} & F_1 \\ e_2 & \frac{\partial}{\partial x_2} & F_2 \\ e_3 & \frac{\partial}{\partial x_3} & F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial x_2} & - & \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_3} & - & \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & - & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

(wobei die Determinantenschreibweise nur symbolisch zu verstehen ist).

Satz 5.14 *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $\varphi \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$ eine injektive Immersion, die eine Einbettung ist. Weiter sei $G \subseteq \varphi(U)$ ein Kompaktum mit glattem Rand. Ist F ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^3$ von G, so gilt (mit $M := \varphi(U)$)*

$$\int_G \langle \operatorname{rot} F, \nu \rangle dS_M = \int_{\partial G} F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + F_3 dx_3.$$

Beweis Wir bezeichnen die Koordinaten in U mit $u = (u_1, u_2)$. In Beispiel 2 aus Abschnitt 5.1 haben wir gesehen, dass

$$\nu\Big(\varphi(u)\Big) = \frac{X_1(u) \times X_2(u)}{\|X_1(u) \times X_2(u)\|_2},$$

wobei

$$X_1(u) = \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u_1} \\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial u_1} \\ \dfrac{\partial \varphi_3}{\partial u_1} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad X_2(u) = \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u_2} \\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial u_2} \\ \dfrac{\partial \varphi_3}{\partial u_2} \end{pmatrix}.$$

Die Oberfläche des von den Vektoren $X_1(u)$ und $X_2(u)$ aufgespannten Parallelogramms ist gleich $\|X_1(u) \times X_2(u)\|$, so dass wir für das Oberflächenmaß S_M auf $M = \varphi(U)$ die Formel

$$dS_M(u) = \|X_1(u) \times X_2(u)\| d\lambda_2(u)$$

erhalten. Hiermit ergibt sich für das Oberflächenintegral (mit $A := \varphi^{-1}(G)$)

$$\int_G \Big\langle (\operatorname{rot} F)(x), \nu(x) \Big\rangle dS_M(x) = \int_A \Big\langle (\operatorname{rot} F)(\varphi(u)), X_1(u) \times X_2(u) \Big\rangle d\lambda_2(u).$$

Bevor wir weiterrechnen, beachten wir, dass beide Seiten der Stokesschen Integralformel linear von F abhängen. Wir können daher die Fälle, wo F nur eine von Null verschiedene Komponente hat, getrennt betrachten und nehmen o.E.d.A. $F_2 = F_3 = 0$ an. Dann ist

$$\operatorname{rot} F = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{\partial F_1}{\partial x_3} \\ -\dfrac{\partial F_1}{\partial x_2} \end{pmatrix},$$

und mit den Bezeichnungen $\partial_j\varphi_k := \frac{\partial\varphi_k}{\partial u_j}$ vereinfacht sich der Integrand des Oberflächenintegrals, geschrieben als Integral über A, zu

$$
\begin{aligned}
&\langle \operatorname{rot} F, X_1 \times X_2\rangle = \\
&= \frac{\partial F_1}{\partial x_3}(\partial_1\varphi_3\partial_2\varphi_1 - \partial_1\varphi_1\partial_2\varphi_3) - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(\partial_1\varphi_1\partial_2\varphi_2 - \partial_1\varphi_2\partial_2\varphi_1) \\
&= \Big(\frac{\partial F_1}{\partial x_3}\partial_1\varphi_3 + \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\partial_1\varphi_2\Big)\partial_2\varphi_1 - \Big(\frac{\partial F_1}{\partial x_3}\partial_2\varphi_3 + \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\partial_2\varphi_2\Big)\partial_1\varphi_1 \\
&= \Big(\frac{\partial F_1}{\partial x_3}\partial_1\varphi_3 + \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\partial_1\varphi_2 + \frac{\partial F_1}{\partial x_1}\partial_1\varphi_1\Big)\partial_2\varphi_1 \\
&\quad -\Big(\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\partial_2\varphi_1 + \frac{\partial F_1}{\partial x_3}\partial_2\varphi_3 + \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\partial_2\varphi_2\Big)\partial_1\varphi_1 \\
&= \frac{\partial(F_1\circ\varphi)}{\partial u_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial u_2} - \frac{\partial(F_1\circ\varphi)}{\partial u_2}\frac{\partial\varphi_1}{\partial u_1}.
\end{aligned}
$$

Für das Kurvenintegral auf der rechten Seite der Stokesschen Formel erhalten wir mit einer geeigneten Parametrisierung $\gamma : [a,b] \to \partial A$ des Randes von A

$$
\begin{aligned}
\int_{\varphi\circ\gamma} F_1 dx_1 &= \int_a^b F_1\Big((\varphi\circ\gamma)(t)\Big)(\varphi_1\circ\gamma)'(t)dt \\
&= \int_a^b F_1\Big((\varphi\circ\gamma)(t)\Big)\Big(\frac{\partial\varphi_1(\gamma(t))}{\partial u_1}\gamma_1'(t) + \frac{\partial\varphi_1(\gamma(t))}{\partial u_2}\gamma_2'(t)\Big)dt \\
&= \int_\gamma (F_1\circ\varphi)\frac{\partial\varphi_1}{\partial u_1}du_1 + (F_1\circ\varphi)\frac{\partial\varphi_1}{\partial u_2}du_2.
\end{aligned}
$$

Wir wollen den Greenschen Satz benutzen und betrachten dazu die beiden Integranten dieses Wegintegrals als Komponenten eines Vektorfeldes H :

$$H_1 := (F_1\circ\varphi)\frac{\partial\varphi_1}{\partial u_2}, \quad H_2 := -(F_1\circ\varphi)\frac{\partial\varphi_1}{\partial u_1}.$$

Dann ist

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div} H &= \frac{\partial(F_1\circ\varphi)}{\partial u_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial u_2} + (F_1\circ\varphi)\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial u_1\partial u_2} - \frac{\partial(F_1\circ\varphi)}{\partial u_2}\frac{\partial\varphi_1}{\partial u_1} - (F_1\circ\varphi)\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial u_1\partial u_2} \\
&= \frac{\partial(F_1\circ\varphi)}{\partial u_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial u_2} - \frac{\partial(F_1\circ\varphi)}{\partial u_2}\frac{\partial\varphi_1}{\partial u_1},
\end{aligned}
$$

d.h.

$$\Big\langle(\operatorname{rot} F)\circ\varphi, X_1\times X_2\Big\rangle = \operatorname{div} H.$$

Der Greensche Integralsatz liefert nun

$$\int_{\partial A} H_1 du_2 - H_2 du_1 = \int_A \operatorname{div} H d\lambda_2.$$

Setzen wir hier obige Formeln ein, erhalten wir den Stokesschen Satz. ∎