4 Integration über Untermannigfaltigkeiten

Im vorigen Kapitel haben wir uns mit der Berechnung von Integralen über meßbaren Mengen im $\mathbb{R}^n$ befasst, wobei das zugrundeliegende Maß stets das n–dimensionale Lebensgue–Maß war. Betrachtet man nun Flächenstücke im $\mathbb{R}^3$ oder Kurven in der Ebene, so verschwinden diese Integrale über solchen Mengen, da die Integrationsbereiche Nullmengen sind. Andererseits ist es für viele Zwecke erforderlich, solchen Integralen über niedriger dimensionalen Gebilden einen Sinn zu geben. Beispielsweise haben wir bereits einer Kurve im $\mathbb{R}^n$ eine Länge zugeordnet (also ein "eindimensionales" Volumen), und wir haben Funktionen über Kurven integriert. Im gleichen Sinn würden wir gern die Größe von Oberflächen von Körpern im $\mathbb{R}^3$ (wie der Oberfläche der Einheitskugel) berechnen oder Integrale über Funktionen auf solchen Flächen betrachten.

4.1 Untermannigfaltigkeiten

Wir haben Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ bereits in der Analysis II kennengelernt, wobei der Schwerpunkt auf der Beschreibung von Untermannigfaltigkeiten als Nullstellenmengen von Funktionen lag. In diesem Abschnitt wird der Schwerpunkt auf der Parametrisierung von Untermannigfaltigkeiten liegen. Beide Sichtweisen sind uns aus der linearen Algebra vertraut, wo man Untervektorräume zum einen als Lösungsmengen linearer homogener Gleichungssysteme und zum anderen durch eine Parameterdarstellung mittels einer Basis beschreibt.

Rufen wir uns zunächst in Erinnerung, was wir aus der Analysis II wissen. Wir betrachten einen stückweise differenzierbaren Weg $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$. Ist γ in t differenzierbar (was in allen bis auf endlich vielen Punkten der Fall ist), so deuten wir die Ableitung $\dot\gamma(t) \in \mathbb{R}^n$ von γ in t als den Geschwindigkeitsvektor und seine Länge

$$\|\dot\gamma(t)\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |\gamma_j'(t)|^2}$$

als die Geschwindigkeit, mit der ein Punkt den Weg γ zum Zeitpunkt t durchläuft. Für die Länge des Weges γ haben wir die Beziehung

$$s(\gamma) = \int_a^b \|\dot\gamma(t)\|_2 dt \tag{4.1}$$

gefunden. (Wir hatten die Länge für beliebige rektifizierbare Wege erklärt und (4.1) als Spezialfall erhalten. Man kann aber (4.1) auch als Definition der Länge eines stückweise stetig differenzierbaren Wegs γ benutzen.) Schließlich haben wir für stetige Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ das Kurvenintegral (1. Art) über γ definiert durch

$$\int_\gamma f := \int_a^b f\big(\gamma(t)\big) \; \|\dot\gamma(t)\|_2 \, dt. \tag{4.2}$$

Wir haben uns auch überlegt (Analysis II, Satz 11.6), dass das Integral in (4.1) nur von der durch γ definierten Kurve $\Gamma = \gamma([a,b])$ abhängt, dass es sich also nicht ändert, wenn man die Kurve Γ umparametrisiert, indem man γ durch $\gamma\circ\varphi$ ersetzt, wobei $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ eine stetig differenzierbare Bijektion mit $\varphi'(t) > 0$ für alle $t \in (\alpha,\beta)$ ist. Gleiches gilt für das Integral (4.2). Wir wollen diese Konzepte nun verallgemeinern auf höherdimensionale Flächenstücke. Diese denken wir uns als gegeben durch differenzierbare Abbildungen $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$, wobei $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen ist. Für $k = 1$ erhalten wir gerade Kurven.

Definition 4.1 *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen. Eine stetig differenzierbare Abbildung $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ heißt* Immersion*, wenn die lineare Abbildung $\varphi'(x) \in L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$ für jedes $x \in U$ injektiv ist, d.h. wenn* $\operatorname{rang} \varphi'(x) = k$ *für alle $x \in U$ ist.*

Ist $\varphi : \mathbb{R}^k \supseteq U \to \mathbb{R}^n$ eine Immersion, so muss insbesondere $k \leq n$ sein.
Wir betrachten wieder φ als eine Parametrisierung der Menge $\varphi(U)$. Mit solchen Parametrisierungen werden wir später Integrale über $\varphi(U)$ definieren, indem wir sie auf "gewöhnliche" Lebesgue–Integrale über $U \subseteq \mathbb{R}^k$ zurückführen. Im Fall $k = 1$ ist $\varphi(U)$ eine Kurve, und φ ist genau dann eine Immersion, wenn $\varphi'(x)$ für kein x die Nullabbildung ist.

Beispiel 1 Die Neilsche Parabel $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (x^2, x^3)$ ist wegen $\varphi'(0) = (0,0)$ *keine* Immersion. Die Singularität im Nullpunkt verhindert die Injektivität. ■

Beispiel 2 Ist $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so ist

$$\varphi : U \to \mathbb{R}^{k+1}, \quad x \mapsto \Big(x, f(x)\Big)$$

eine Immersion. Tatsächlich erhalten wir für die Jacobimatrix $J_x(\varphi)$ der Ableitung $\varphi'(x) \in L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^{k+1})$

$$J_x(\varphi) = \begin{pmatrix} I_{k\times k} \\ J_x(f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \end{pmatrix},$$

und diese Matrix hat offenbar für jedes $x \in U$ den Rang k. ■

Beispiel 3 Für die Funktion

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (r,\varphi) \mapsto \begin{pmatrix} r^2 \cos\varphi \\ r^2 \sin\varphi \\ r^3 \end{pmatrix}$$

ist die Matrixdarstellung der linearen Abbildung $\varphi'(r,\varphi)$ gleich

$$J_{(r,\varphi)}(\Phi) = \begin{pmatrix} 2r\cos\varphi & -r^2\sin\varphi \\ 2r\sin\varphi & r^2\cos\varphi \\ 3r^2 & 0 \end{pmatrix},$$

und man macht sich leicht klar, dass der Rang dieser Matrix genau dann gleich 2 ist, wenn $r \neq 0$. Die Einschränkung von Φ auf $\mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times \mathbb{R})$ ist also eine Immersion. (Die Abbildung Φ selbst ist aber offenbar nicht injektiv.) Die Menge $\Phi(\mathbb{R}^2)$ entsteht durch Rotation der Kurve $\{(r^2, 0, r^3) : r \in \mathbb{R}\}$ (die man sich als Neilsche Parabel in der xz–Ebene vorstellen kann) um die z–Achse (vgl. auch das folgende Beispiel). Die "obere Schale" dieser Fläche berührt die untere (ihr Spiegelbild an der xy–Ebene) in der 0. Derartige Singularitäten werden durch die Forderung der Injektivität von $\varphi'(x)$ in jedem Punkt vermieden. ■

Beispiel 4 Wir sehen uns nun allgemein Rotationsflächen wie in Beispiel 3 an. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und

$$\gamma : I \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} r(t) \\ 0 \\ z(t) \end{pmatrix}$$

eine stetig differenzierbare Funktion (deren Bild in der xz–Ebene liegt). Wir nehmen weiter an, dass $r(t) > 0$ für alle $t \in I$ (so dass das Bild von γ in der rechten Halbebene der xz–Ebene liegt). Nun betrachten wir die stetig differenzierbare Abbildung

$$\Phi : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad (t,\varphi) \mapsto \begin{pmatrix} r(t)\cos\varphi \\ r(t)\sin\varphi \\ z(t) \end{pmatrix}$$

mit dem Bild

$$\Phi(I \times \mathbb{R}) = \Big\{(x, y, z(t)) : x^2 + y^2 = r(t)^2, t \in I\Big\}.$$

Das Bild von Φ entsteht also durch Rotation des Bildes von γ um die z–Achse. Die Jacobi–Matrix von Φ in (t,φ) ist

$$J_{(t,\varphi)}(\Phi) = \begin{pmatrix} r'(t)\cos\varphi & -r(t)\sin\varphi \\ r'(t)\sin\varphi & r(t)\cos\varphi \\ z'(t) & 0 \end{pmatrix}.$$

Da wir $r(t) > 0$ für alle $t \in I$ angenommen haben, hat diese Matrix genau dann den Rang 2, wenn $r'(t) \neq 0$ oder $z'(t) \neq 0$, d.h. wenn $\gamma'(t) \neq 0$. Ist also γ eine

Immersion, so ist auch Φ eine Immersion. ■

Beispiel 5 Schließlich sehen wir uns noch eine Parametrisierung der zweidimensionalen Sphäre an. Wir betrachten die Abbildung

$$P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (\varphi, \theta) \mapsto \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

mit der Jacobimatrix

$$J_{(\varphi,\theta)}(P) = \begin{pmatrix} -\sin\varphi\cos\theta & -\cos\varphi\sin\theta \\ \cos\varphi\cos\theta & -\sin\varphi\sin\theta \\ 0 & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix hat genau dann den Rang 2, wenn $\cos\theta \neq 0$. Die Einschränkung von P auf die offene Menge $\mathbb{R} \times (-\pi/2, \pi/2)$ ist also eine Immersion, und

$$P\Big(\mathbb{R} \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\Big) = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, \ \ |z| \neq 1\Big\}$$

ist die Einheitsphäre ohne Nord– und Südpol. ■

Wir diskutieren nun, wie der Begriff der Immersion zum Begriff der k–dimensionalen Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ steht. Hier ist noch einmal die Definition.

Definition 4.2 *Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt k–*dimensionale Untermannigfaltigkeit*, wenn für jeden Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^n$, eine offene Menge $W \subseteq \mathbb{R}^n$ und ein Diffeomorphismus $\Phi : V \to W$ so existieren, dass*

$$\Phi(V \cap M) = W \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$$

(wobei wir $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ schreiben).

Die Menge M sieht also lokal aus wie $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ in $\mathbb{R}^n$. Weiter benötigen wir den folgenden Begriff.

Definition 4.3 *Seien X und Y metrische Räume. Eine stetige Abbildung $\varphi : X \to Y$ heißt* Einbettung*, wenn sie injektiv ist und wenn die Umkehrabbildung $\varphi^{-1} : \varphi(X) \to X$ (bzgl. der von Y auf $\varphi(X)$ induzierten Metrik) ebenfalls stetig ist.*

Beispiel 6 Die Abbildung $\gamma : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ ist stetig und injektiv, und ihr Bild ist die Einheitskreislinie $\mathbb{S}^1$. Die Umkehrabbildung $\eta : \mathbb{S}^1 \to [0, 2\pi)$, $\gamma(t) \mapsto t$ ist jedoch nicht stetig, denn es gilt $\gamma(2\pi - \frac{1}{n}) \to \gamma(0)$, aber $2\pi - \frac{1}{n} = \eta(\gamma(2\pi - \frac{1}{n}))$ konvergiert nicht gegen $0 = \eta(\gamma(0))$. Die Abbildung γ ist also keine Einbettung. ■

Satz 4.4 (Parametrisierungssatz) *Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine k–dimensionale Untermannigfaltigkeit, wenn es für jeden Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^n$, eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^k$ und eine Immersion $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ mit $\varphi(U) = V \cap M$ gibt, die eine Einbettung ist.*

Beweis Sei zunächst M eine k–dimensionale Untermannigfaltigkeit und $p \in M$. Dann gibt es offene Mengen $V, W \in \mathbb{R}^n$ mit $p \in V$ und einen Diffeomorphismus $\Phi : V \to W$ so, dass

$$\Phi(V \cap M) = W \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}).$$

Sei $U := \{x \in \mathbb{R}^k : (x, 0) \in W\}$ und $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto \Phi^{-1}(\eta(x))$, wobei $\eta : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ die lineare Abbildung $x \mapsto (x, 0)$ ist. Dann ist U offen, $\varphi(U) = V \cap M$, und

$$\varphi'(x) = (\Phi^{-1})'\Big(\eta(x)\Big) \circ \eta.$$

Als Produkt injektiver Abbildungen ist $\varphi'(x)$ für jedes $x \in U$ injektiv, d.h. φ ist eine Immersion. Schließlich ist die inverse Abbildung zu $\varphi : U \to \varphi(U)$ durch $\varphi^{-1} = \pi \circ \Phi\big|_{\varphi(U)}$ gegeben, wobei $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ die Projektion $(x, y) \mapsto x$ ist. Aus der Stetigkeit von Φ und π folgt, dass φ eine Einbettung ist.

Wir zeigen die umgekehrte Richtung. Sei $p \in M$. Dann gibt es eine offene Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^n$ von p, eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^k$ und eine Immersion $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ mit $\varphi(U) = V \cap M$, die eine Einbettung ist. Sei $w := \varphi^{-1}(p)$. Wir schreiben $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$. Wegen rang $\varphi'(w) = k$ können wir nach Umnummerierung der Koordinaten annehmen, dass die Matrix

$$\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(w)\right)_{i,j=1}^{k}$$

invertierbar ist (das ist gerade der obere $k \times k$–Block der Jacobimatrix von φ in w). Sei $\tilde{\varphi} := (\varphi_1, \ldots, \varphi_k) : U \to \mathbb{R}^k$. Dann ist also $\tilde{\varphi}'(w)$ invertierbar, und mit dem Satz über die Umkehrfunktion finden wir eine offene Umgebung $W \subseteq U$ von w so, dass $\tilde{\varphi}\big|_W$ ein Diffeomorphismus ist. Wir definieren

$$\Phi : W \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^n, \quad (u, x) = (u_1, \ldots, u_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) \mapsto$$
$$\mapsto \varphi(u) + (0, x) = \Big(\varphi_1(u), \ldots, \varphi_k(u),\ \ \varphi_{k+1}(u) + x_{k+1}, \ldots, \varphi_n(u) + x_n\Big).$$

Dann ist Φ ein Diffeomorphismus von $W \times \mathbb{R}^{n-k}$ auf $\tilde{\varphi}(W) \times \mathbb{R}^{n-k}$, denn

$$\Phi^{-1}(v, y) = \Big(\tilde{\varphi}^{-1}(v), y_{k+1} - \varphi_{k+1}(\tilde{\varphi}^{-1}(v)), \ldots, y_n - \varphi_n(\tilde{\varphi}^{-1}(v))\Big)$$

ist stetig differenzierbar. Weiter ist

$$\Phi^{-1}\Big(\varphi(u)\Big) = (u, 0) \quad \text{für } u \in W$$

und somit
$$\Phi^{-1}\big(\varphi(W)\big) = W \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} = \mathbb{R}^n.$$
Da φ eine Einbettung ist, ist $\varphi(W)$ offen in $M \cap V$. Es gibt also eine offene Teilmenge $V_p \subseteq \mathbb{R}^n$ so, dass $\varphi(W) = M \cap V_p$. Wir haben somit für jeden Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung $V_p \subseteq \mathbb{R}^n$ und einen Diffeomorphismus Φ^{-1} von V_p in $\mathbb{R}^n$ gefunden, so dass

$$\Phi^{-1}(M \cap V_p) = \Phi^{-1}\Big(\varphi(W)\Big) = W \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}.$$

Also ist M eine k–dimensionale Mannigfaltigkeit. ■

Die Immersionen $\varphi : U \to M$, deren Existenz wir soeben gezeigt haben, nennen wir *Parametrisierungen* oder *Karten* der Menge $\varphi(U) \subseteq M$. Oft schreibt man auch (φ, U) für eine Karte $\varphi : U \to M$. Die Funktionen $(\varphi^{-1})_j : \varphi(U) \to \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, k$, stellt man sich als *Koordinaten* eines Punktes $p \in \varphi(U)$ vor. Für $p = \varphi(x_1, \dots, x_k)$ sind also $x_1, \dots, x_k$ die Koordinaten bezüglich der Karte (φ, U). Offenbar kann ein Punkt für verschiedene Karten verschiedene Koordinaten besitzen. Man hat sich daher zu überlegen, was beim Wechsel von Koordinatensystemen passiert.

Satz 4.5 (Parameter–Transformation) *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k–dimensionale Untermannigfaltigkeit, und*

$$\varphi_j : U_j \to V_j := \varphi_j(U_j) \subseteq M, \quad j = 1, 2,$$

seien Karten mit $V_1 \cap V_2 =: V \neq \emptyset$. Dann sind $W_j := \varphi_j^{-1}(V)$ offene Teilmengen von U_j, und
$$\psi := \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1\big|_{W_1} : W_1 \to W_2$$
ist ein Diffeomorphismus.

Beweis Da V eine offene Teilmenge von V_j und φ_j stetig ist, ist W_j als Urbild einer offenen Teilmenge von V_j offen. Aus den Definitionen ist auch klar, dass ψ bijektiv und stetig ist und eine stetige Umkehrfunktion besitzt. Wir zeigen, dass ψ stetig differenzierbar ist. Sei $x \in W_1$. Nach Definition einer k–dimensionalen Untermannigfaltigkeit gibt es eine Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von $\varphi_1(x)$ mit $M \cap U \subseteq V$ (das dürfen wir zusätzlich annehmen) und einen Diffeomorphismus $\Phi : U \to \Phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ mit
$$\Phi(M \cap U) = \Phi(U) \cap \Big(\mathbb{R}^k \times \{0\}\Big).$$
Dann ist

$$\Phi \circ \varphi_1 = (g_1, \dots, g_k, 0, \dots, 0) \quad \text{und} \quad \Phi \circ \varphi_2 = (h_1, \dots, h_k, 0, \dots, 0)$$

mit gewissen stetig differenzierbaren Funktionen $g_i : \varphi_1^{-1}(M \cap U) \to \mathbb{R}$ und $h_j : \varphi_2^{-1}(M \cap U) \to \mathbb{R}$. Folglich sind auch die Funktionen

$$G := (g_1, \ldots, g_k) : \varphi_1^{-1}(M \cap U) \to \mathbb{R}^k, \quad H := (h_1, \ldots, h_k) : \varphi_2^{-1}(M \cap U) \to \mathbb{R}^k$$

stetig differenzierbar. Bezeichnet π wieder die im Beweis von Satz 4.4 eingeführte Projektion, so ist mit der Kettenregel

$$\begin{aligned} G'(x) &= (\pi \circ \Phi \circ \varphi_1)'(x) = \pi'\Big(\Phi(\varphi_1(x))\Big) \circ \Phi'\Big(\varphi_1(x)\Big) \circ \varphi_1'(x) \\ &= \pi \circ \Phi'\Big(\varphi_1(x)\Big) \circ \varphi_1'(x). \end{aligned}$$

Als Produkt injektiver Abbildungen ist $G'(x)$ injektiv und folglich invertierbar (beachte: $G'(x) \in L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$). Nach Folgerung 12.6 aus Ana II ist $G : \varphi_1^{-1}(M \cap U) \to \Phi(M \cap U)$ ein Diffeomorphismus, und ebenso ist $H : \varphi_2^{-1}(M \cap U) \to \Phi(M \cap U)$ ein Diffeomorphismus. Auf der Umgebung $\varphi_1^{-1}(M \cap U)$ von x haben wir nun

$$\psi = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 = \varphi_2^{-1}\Phi^{-1}\eta\, \pi\, \Phi\varphi_1 = (\pi\Phi\varphi_2)^{-1}(\pi\Phi\varphi_1) = H^{-1} \circ G,$$

d.h. ψ ist auf dieser Umgebung stetig differenzierbar. Da $x \in W_1$ beliebig war, ist ψ auf W_1 stetig differenzierbar. Entsprechend erhält man die stetige Differenzierbarkeit von $\psi^{-1} : W_2 \to W_1$. ■

4.2 Integration über Untermannigfaltigkeiten, Teil 1

Wir wollen nun das Integral von Funktionen über k–dimensionalen Untermannigfaltigkeiten M von $\mathbb{R}^n$ definieren und beginnen mit dem einfachsten Fall, wenn M durch eine einzige injektive Immersion beschrieben werden kann. Zur Motivation betrachten wir zunächst wieder eine lineare Version. Sei $k < n$, $A : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ linear und $W := [0,1]^k$ der k–dimensionale Einheitswürfel. Dann ist das n–dimensionale Volumen von AW gleich Null nach Folgerung 3.9 (und wenig interessant). Wir wollen ein "k–dimensionales Volumen" von AW definieren. Dieses soll sich nicht ändern, wenn eine orthogonale Abbildung (=Drehung) B auf AW angewendet wird. Wie aus der linearen Algebra bekannt ist, kann B so gewählt werden, dass $\operatorname{Im} BA \subseteq \mathbb{R}^k \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^n$. Ist $P : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} = \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $(x, y) \mapsto x$, so ist es weiter vernünftig anzunehmen, dass BAW und $PBAW$ gleiche k–dimensionale Volumina besitzen. Nun ist aber PBA eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^k$ nach $\mathbb{R}^k$ und daher

$$\lambda_k(PBAW) = |\det(PBA)|$$

(vgl. Abschnitt 3.2). Diese Formel ist noch nicht sehr hilfreich, da sie die Matrix B enthält (die wir irgendwie wählen mussten). Nun ist aber

$$\begin{aligned} |\det(PBA)|^2 &= \det(A^T B^T P^T)\det(PBA) = \det(A^T B^T P^T PBA) \\ &= \det(A^T B^T BA) = \det(A^T A) \end{aligned}$$

(beachte: P^TP ist der Orthoprojektor von $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ auf $\mathbb{R}^k \times \{0\}$, und wegen $\mathrm{Im} BA \subseteq \mathbb{R}^k \times \{0\}$ ist $P^TPBA = BA$). Damit haben wir eine brauchbare Formel für das k–dimensionale Volumen von AW gefunden:

$$\mathrm{vol}_k(AW) = \sqrt{\det(A^TA)}.$$

(Die Matrix A^TA ist positiv semidefinit und hat daher eine nichtnegative Determinante.) Damit ist der Weg zur Definition des k–dimensionalen Volumens von parametrisierten Untermannigfaltigkeiten vorgezeichnet.

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ eine Immersion und $J_x(\varphi)$ ihre Jacobimatrix im Punkt $x \in U$. Die $k \times k$–Matrix

$$G(x) := J_x(\varphi)^T J_x(\varphi)$$

heißt der *Maßtensor oder die Gramsche Matrix von* φ, und die durch $g(x) := \det G(x)$ definierte Funktion heißt die *Gramsche Determinante* von φ. Diese Bezeichnung rührt daher, dass

$$G(x) = \Big(g_{ij}(x)\Big)_{i,j=1}^{k} \quad \text{mit} \quad g_{ij}(x) = \Big\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x), \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) \Big\rangle$$

ist, wobei $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = (\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i}, \ldots, \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i})$. Die Matrix $G(x)$ ist also die *Gramsche Matrix* der Vektoren $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x)$, d.h. der Spalten von $J_x(\varphi)$. Wegen rang $J_x(\varphi) = k$ sind diese Spalten linear unabhängig, d.h. $G(x)$ ist positiv definit. Insbesondere ist $g(x) > 0$ für alle $x \in U$.

Definition 4.6 *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ Untermannigfaltigkeit, $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen und (φ, U) eine Karte von M mit $\varphi(U) = M$. Eine Teilmenge $E \subseteq M$ heißt* messbar *(bzgl. φ), wenn ihr Urbild $\varphi^{-1}(E)$ messbar ist. Ist $E \subseteq M$ messbar, so heißt*

$$S_M(E) := \int_{\varphi^{-1}(E)} \sqrt{g(x)}\, d\lambda_k(x) \tag{4.3}$$

das k–dimensionale Volumen von *E (bzgl. φ). Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ heißt* integrierbar *(bzgl. φ), wenn die Funktion*

$$U \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f\Big(\varphi(x)\Big)\sqrt{g(x)}$$

Lebesgue–integrierbar auf U ist. In diesem Fall heißt

$$\int_M f dS_M := \int_U f\Big(\varphi(x)\Big)\sqrt{g(x)}\, d\lambda_k(x) \tag{4.4}$$

das Integral von f über M *(bzgl. φ).*

Wir haben also das Integral $\int_M f dS_M$ einfach durch (4.4) erklärt. Man kann aber auch anders zu diesem Integral gelangen. Nach Satz 2.6 ist nämlich

$$\mu : A \mapsto \int_A \sqrt{g(x)}\, d\lambda_k(x)$$

ein Maß auf der σ–Algebra $\tilde{B}(\mathbb{R}^k)$ der erweiterten Borelmengen. Hiermit kann man zeigen, dass die Menge der messbaren Teilmengen von M ebenfalls eine σ–Algebra bildet und dass S_M ein vollständiges Maß auf dieser σ–Algebra ist, das sogenannte *Oberflächenmaß von* M. Das bezüglich dieses Maßes erklärte Integral stimmt mit (4.4) überein.

Man beachte, dass aus Folgerung 1.9 und der Stetigkeit von φ folgt, dass jede Borelmenge des metrischen Raumes M messbar ist. Weiter nennen wir eine messbare Menge $E \subseteq M$ eine *Nullmenge*, wenn $S_M(E) = 0$ ist. Wie in Abschnitt 2.2 zeigt man: wird eine integrierbare Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ auf einer Nullmenge abgeändert, so bleibt sie integrierbar mit dem gleichen Integral. Wir zeigen nun, dass die in Definition 4.6 erklärten Volumina bzw. Integrale nicht von der Parametrisierung φ abhängen. Die Bemerkungen (*bzgl.* φ) dürfen also weggelassen werden.

Lemma 4.7 *Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, $\tau : V \to U$ ein Diffeomorphismus, $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Funktion und $f : \varphi(U) \to \mathbb{R}$. Weiter seien*

$$g_\varphi(x) := \det\Big(J_x(\varphi)^T J_x(\varphi)\Big) \quad \textit{bzw.} \quad g_{\varphi\circ\tau}(y) := \det\Big(J_y(\varphi\circ\tau)^T J_y(\varphi\circ\tau)\Big)$$

die Gramschen Determinanten von φ bzw. $\varphi\circ\tau$. Ist eine der Funktionen

$$x \mapsto f\Big(\varphi(x)\Big)\sqrt{g_\varphi(x)} \quad \textit{bzw.} \quad y \mapsto f\Big((\varphi\circ\tau)(y)\Big)\sqrt{g_{\varphi\circ\tau}(y)}$$

auf U bzw. V Lebesgue–integrierbar, so ist es auch die andere, und es gilt

$$\int_U f\Big(\varphi(x)\Big)\sqrt{g_\varphi(x)}\, d\lambda_k(x) = \int_V f\Big((\varphi\circ\tau)(y)\Big)\sqrt{g_{\varphi\circ\tau}(y)}\, d\lambda_k(y).$$

Beweis Mit der Kettenregel $(\varphi\circ\tau)'(y) = \varphi'(\tau(y)) \circ \tau'(y)$ folgt

$$J_y(\varphi\circ\tau)^T J_y(\varphi\circ\tau) = J_y(\tau)^T J_{\tau(y)}(\varphi)^T J_{\tau(y)}(\varphi) J_y(\tau)$$

und damit $g_{\varphi\circ\tau}(y) = (\det\tau'(y))^2 g_\varphi(\tau(y))$. Mit der Transformationsformel erhalten wir nun

$$\begin{aligned}
&\int_V f\Big((\varphi\circ\tau)(y)\Big)\sqrt{g_{\varphi\circ\tau}(y)}\, d\lambda_k(y)\\
&= \int_V f\Big(\varphi(\tau(y))\Big)\sqrt{g_\varphi(\tau(y))}\, |\det\tau'(y)|\, d\lambda_k(y)\\
&= \int_U f\Big(\varphi(x)\Big)\sqrt{g_\varphi(x)}\, d\lambda_k(x).
\end{aligned}$$

Der Transformationssatz liefert auch die Aussage über die Integrierbarkeit. ■

Beispiel Wir betrachten den Fall $k = 1$. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^1$ ein offenes Intervall und $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ eine injektive Immersion. Dann ist $M := \varphi(U)$ eine Kurve in $\mathbb{R}^n$. Aus

$$G(x) = J_x(\varphi)^T J_x(\varphi) = \langle \varphi'(x), \varphi'(x) \rangle = \|\varphi'(x)\|_2^2$$

erhalten wir $g(x) = \|\varphi'(x)\|_2$ und damit

$$S_M(M) = \int_U \|\varphi'(t)\|_2 \, d\lambda_1(t).$$

Das ist exakt die Formel, die wir in Satz 11.5 (Ana II) für die Länge der Kurve M gefunden haben. Das Integral von $f : M \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$\int_M f dS_M = \int_U f\Big(\varphi(t)\Big) \|\varphi'(t)\|_2 \, d\lambda_1(t),$$

und das ist genau die Definition des Kurvenintegrals (1. Art) aus Abschnitt 11.2 der Ana II–Vorlesung. ■

4.3 Integration über Untermannigfaltigkeiten, Teil 2.

Wir schauen uns nun Untermannigfaltigkeiten an, die nicht mehr durch eine einzige Karte beschrieben werden können.
Zuerst überlegen wir uns, dass man für jede Untermannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine abzählbare Familie $(\varphi_j, U_j)_{j \geq 1}$ von Karten so findet, dass

$$M = \bigcup_{j \geq 1} \varphi_j(U_j). \tag{4.5}$$

Nach dem Parametrisierungssatz gibt es nämlich zu jedem $p \in M$ eine offene Umgebung $V_p \subseteq \mathbb{R}^n$ so, dass $V_p \cap M = \varphi_p(U_p)$ für eine Karte (φ_p, U_p) von M. Durch Verkleinern von V_p können wir annehmen, dass

$$V_p = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - q\|_2 < r_q\}$$

mit $q \in \mathbb{Q}^n$ und $r_q \in \mathbb{Q}$. Da es nur abzählbar viele solcher Mengen gibt und da jeder Punkt $p \in M$ in einer solchen Menge liegt, erhalten wir (4.5). In praktischen Anwendungen genügen meist endlich viele Karten, um M zu überdecken.

Lemma 4.8 *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit, und seien $(\varphi_j, U_j)_{j \geq 1}$ und $(\tilde{\varphi}_i, \tilde{U}_i)_{i \geq 1}$ abzählbare Familien von Karten von M mit*

$$M = \bigcup_{j \geq 1} \varphi_j(U_j) = \bigcup_{i \geq 1} \tilde{\varphi}_i(\tilde{U}_i).$$

Wir setzen $M_j := \varphi_j(U_j), \tilde{M}_i = \tilde{\varphi}_i(\tilde{U}_i)$, $N_1 := M_1, \tilde{N}_1 := \tilde{M}_1$, *und für* $i, j > 1$

$$N_j := M_j \setminus (M_1 \cup \ldots \cup M_{j-1}), \quad \tilde{N}_i := \tilde{M}_i \setminus (\tilde{M}_1 \cup \ldots \cup \tilde{M}_{i-1}),$$

und wir erhalten zwei jeweils paarweise disjunkte und abzählbare Familien $(N_j)_{j\geq 1}$, $(\tilde{N}_i)_{i\geq 1}$ *von Borelmengen, die* M *überdecken. Ist* $E \subseteq M$ *eine Menge, für die jeder Durchschnitt* $E \cap N_j$ *(bzgl.* φ_j*) messbar ist, so ist auch jeder Durchschnitt* $E \cap \tilde{N}_i$ *(bzgl.* $\tilde{\varphi}_i$*) messbar, und es gilt*

$$\sum_{j=1}^{\infty} S_{M_j}(E \cap N_j) = \sum_{i=1}^{\infty} S_{\tilde{M}_i}(E \cap \tilde{N}_i).$$

Beweis Wir schreiben

$$E \cap N_j = \bigcup_{i\geq 1} (E \cap N_j \cap \tilde{N}_i).$$

Die Menge $E \cap N_j$ ist bzgl. S_{M_j} messbar, und da $\tilde{N}_i$ Borelmenge ist, ist auch $E\cap N_j\cap\tilde{N}_i$ bzgl. S_{M_j} messbar. Genauso sieht man die Messbarkeit von $E\cap N_j\cap\tilde{N}_i$ bzgl. $S_{\tilde{M}_i}$. Nach Satz 4.5 über Parameter–Transformation, den wir auf die offene Menge $M_j \cap \tilde{M}_i$ anwenden, erhalten wir mit Lemma 4.7

$$S_{M_j}(E \cap N_j \cap \tilde{N}_i) = S_{\tilde{M}_i}(E \cap N_j \cap \tilde{N}_i).$$

Schließlich erhalten wir mit dem Doppelreihensatz (Satz 9.19, Ana II), den wir hier nur in einer einfachen Version benötigen, da alle Summanden nichtnegativ sind,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\infty} S_{M_j}(E \cap N_j) &= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} S_{M_j}(E \cap N_j \cap \tilde{N}_i) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} S_{\tilde{M}_i}(E \cap N_j \cap \tilde{N}_i)\\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} S_{\tilde{M}_i}(E \cap N_j \cap \tilde{N}_i) = \sum_{i=1}^{\infty} S_{\tilde{M}_i}(E \cap \tilde{N}_i). \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

Eine Teilmenge $E \subseteq M$ mit den im Lemma genannten Eigenschaften nennen wir *messbar auf* M. Messbarkeit hängt nach diesem Lemma nicht von den gewählten Karten ab.

Definition 4.9 *Sei* $M \subseteq \mathbb{R}^n$ *Untermannigfaltigkeit und* $(\varphi_j, U_j)_{\geq 1}$ *eine Familie von Karten von* M *mit* $M = \cup_{j\geq 1}\varphi_j(U_j)$. *Weiter seien* M_j *und* N_j *wie in Lemma 4.8 erklärt. Für jede messbare Menge* $E \subseteq M$ *definieren wir*

$$S_M(E) := \sum_{j=1}^{\infty} S_{M_j}(E \cap N_j). \tag{4.6}$$

Lemma 4.8 garantiert, dass diese Definition nicht von den gewählten Karten abhängt. Man kann zeigen, dass durch (4.6) ein Maß S_M auf der σ–Algebra der messbaren Teilmengen von M definiert wird und dass das zugehörige Integral einer integrierbaren Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ gegeben ist durch

$$\int_M f dS_M = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\varphi_j^{-1}(N_j)} f\Big(\varphi_j(x)\Big)\sqrt{g_{\varphi_j}(x)}\, d\lambda_k(x). \tag{4.7}$$

Das Maß S_M heißt das Oberflächenmaß *auf M.*

Einige der in dieser Definition formulierten Aussagen (S_M ist Maß, ...) werden Sie sich im Tutorium ansehen.

Mit der Definition des Oberflächenmaßes haben wir Integralen über Untermannigfaltigkeiten einen präzisen Sinn gegeben. Wir wenden uns einigen Beispielen zu.

Beispiel 1 Hier betrachten wir die allgemeinen Rotationsflächen aus Beispiel 4 in Abschnitt 4.1. Die Parametrisierung $\Phi : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ ($I \subseteq \mathbb{R}$ offenes Intervall) und ihre Jacobimatrix in (t, φ) sind also gegeben durch

$$\Phi(t,\varphi) = \begin{pmatrix} r(t)\cos\varphi \\ r(t)\sin\varphi \\ z(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad J_{(t,\varphi)}(\Phi) = \begin{pmatrix} r'(t)\cos\varphi & -r(t)\sin\varphi \\ r'(t)\sin\varphi & r(t)\cos\varphi \\ z'(t) & 0 \end{pmatrix},$$

und für den Maßtensor und die Gramsche Determinante findet man

$$G(t,\varphi) = \begin{pmatrix} r'(t)^2 + z'(t)^2 & 0 \\ 0 & r^2(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g(t,\varphi) = r(t)\,\|\gamma'(t)\|_2$$

mit $\gamma(t) = (r(t), 0, z(t))$ (wir hatten $r(t) > 0$ in Beispiel 4 vorausgesetzt). Für $M := \Phi(I \times (0, 2\pi))$ erhält das Oberflächenintegral daher die Form

$$\int_M f dS_M = \int_I \int_0^{2\pi} f\Big(\Phi(t,\varphi)\Big) r(t)\|\gamma'(t)\|_2\, d\varphi dt.$$

Für $f \equiv 1$ ergibt sich insbesondere für das 2–dimensionale Volumen von M

$$S_M(M) = \int_I \int_0^{2\pi} r(t)\|\gamma'(t)\|_2\, d\varphi dt = 2\pi \int_I r(t)\|\gamma'(t)\|_2\, dt.$$

Für die zweidimensionale Sphäre $\mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ ist $I = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $r(t) = \cos t$, $z(t) = \sin t$ und damit $\|\gamma'(t)\|_2 = 1$ und

$$S_M(\mathbb{S}^2) = 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t\, dt = 4\pi. \qquad \blacksquare$$

Beispiel 2 Hier sehen wir uns Funktionsgraphen an (vgl. Beispiel 2 aus Abschnitt 4.1). Sei $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann ist $\varphi : U \to \mathbb{R}^{k+1}$, $x \mapsto (x, f(x))$ eine injektive Immersion, und die Umkehrfunktion $\varphi(U) \to U$, $(x, f(x)) \mapsto x$ ist offenbar stetig (Projektion auf die erste Komponente). Also ist $M := \varphi(U)$ eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{k+1}$. Weiter haben wir

$$J_x(\varphi) = \begin{pmatrix} I \\ J_x(f) \end{pmatrix}$$

und

$$G(x) = \begin{pmatrix} I \, J_x(f)^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ J_x(f) \end{pmatrix} = I + J_x(f)^T J_x(f),$$

wobei I die $k \times k$–Einheitsmatrix ist. Wir bestimmen zunächst die Eigenwerte der symmetrischen Matrix $G(x)$. Ist $v \in \ker J_x(f)$, so ist $J_x(f)v = 0$ und somit $G(x)v = v$. Alle Vektoren $\neq 0$ aus dem (mindestens $k-1$–dimensionalen) Kern von $J_x(f) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^1$ sind also Eigenvektoren zum Eigenwert 1. Außerdem ist für den Vektor $(\operatorname{grad} f)(x) \in \mathbb{R}^k$, den wir uns als Zeilenvektor denken,

$$\begin{aligned} G(x)(\operatorname{grad} f)(x)^T &= (\operatorname{grad} f)(x)^T + (\operatorname{grad} f)(x)^T (\operatorname{grad} f)(x)(\operatorname{grad} f)(x)^T \\ &= \Big(1 + \|(\operatorname{grad} f)(x)\|_2^2\Big)(\operatorname{grad} f)^T(x), \end{aligned}$$

so dass (falls $f'(x) \neq 0$) $(\operatorname{grad} f)^T(x)$ Eigenvektor zum Eigenwert $1 + \|(\operatorname{grad} f)(x)\|_2^2$ ist. Da die Determinante von $G(x)$ das Produkt der Eigenwerte dieser Matrix ist, folgt:

$$g(x) = 1 + \|(\operatorname{grad} f)(x)\|_2^2. \tag{4.8}$$

Für $M := \varphi(U)$ ist also das k–dimensionale Volumen gleich

$$S_M(M) = \int_U \sqrt{1 + \|(\operatorname{grad} f)(x)\|_2^2} \, d\lambda_k(x).$$

Insbesondere ist für $n > 1$ die obere Halbsphäre vom Radius $r > 0$,

$$M := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = r, \ x_n > 0\}$$

der Graph der Funktion

$$\begin{aligned} F : U &:= \{x \in \mathbb{R}^{n-1} : \|x\|_2 < r\} \to \mathbb{R}, \ \ x \mapsto \sqrt{r^2 - \|x\|_2^2} \\ &= \sqrt{r^2 - x_1^2 - \ldots - x_{n-1}^2}\,. \end{aligned}$$

Aus $\frac{\partial F}{\partial x_j}(x) = -\frac{x_j}{F(x)}$ folgt mit (4.8)

$$g(x) = 1 + \|(\operatorname{grad} F)(x)\|_2^2 = 1 + \frac{\|x\|_2^2}{F(x)^2} = \frac{F(x)^2 + \|x\|_2^2}{F(x)^2} = \frac{r^2}{r^2 - \|x\|_2^2}$$

und damit

$$\begin{aligned}\int_M f dS_M &= \int_{\|x\|_2<r} f\Big(x, \sqrt{r^2-\|x\|_2^2}\Big)\frac{r}{\sqrt{r^2-\|x\|_2^2}}\, d\lambda_{n-1}(x)\\ &= \int_{\|y\|_2<1} f\Big(ry, r\sqrt{1-\|y\|_2^2}\Big)\frac{r^{n-1}}{\sqrt{1-\|y\|_2^2}}\, d\lambda_{n-1}(y), \qquad (4.9)\end{aligned}$$

wobei wir $x = ry$ substituiert haben. ■

Beispiel 3 Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k–dimensionale Untermannigfaltigkeit und $r > 0$. Ist $\varphi : U \to M$ eine Karte von M, so ist $r\varphi : U \to rM$ eine Karte von rM. Hieraus folgt, dass rM ebenfalls eine k–dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ ist. Weiter folgt aus $(r\varphi)'(x) = r\varphi'(x)$ für die Gramschen Determinanten von φ bzw. $r\varphi$, dass $g_{r\varphi}(x) = r^{2k}g_\varphi(x)$, d.h. $\sqrt{g_{r\varphi}(x)} = r^k\sqrt{g_\varphi(x)}$. Folglich gilt

$$S_{rM}(rE) = r^k S_M(E)$$

für jede messbare Teilmenge $E \subseteq M$ und

$$\int_{rM} f(x)dS_{rM}(x) = r^k \int_M f(rx)dS_M(x) \qquad (4.10)$$

für jede integrierbare Funktion $f : rM \to \mathbb{R}$. ■

Satz 4.10 *Sei $n > 1$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lebesgue–integrierbar. Dann ist für fast jedes $r > 0$ die Funktion f über der Sphäre $S_r := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = r\}$ integrierbar, und es gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\lambda_n = \int_0^\infty \int_{S_r} f(x)dS_{S_r}(x)dr = \int_0^\infty \int_{S_1} f(ry)dS_{S_1}(y)r^{n-1}dr. \qquad (4.11)$$

Beweis Sei $H_\pm := \{x \in \mathbb{R}^n : \pm x_n > 0\}$. Dann ist $f = f\chi_{H_+} + f\chi_{H_-}$ fast überall, denn $\{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$ ist eine Nullmenge. Da $S_r \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$ eine $(n-1)$–dimensionale Nullmenge ist, genügt es, die Behauptung für jede der Funktionen $f\chi_{H_\pm}$ zu zeigen. Wir tun dies für $f\chi_{H_+}$ und nehmen gleich an, dass f außerhalb von H_+ verschwindet.

Sei $U := \{x \in \mathbb{R}^{n-1} : \|x\| < 1\}$. Die Abbildung

$$\Phi : U \times (0,\infty) \to H_+ \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}, \ \ (x, r) \mapsto \Big(rx, r\sqrt{1-\|x\|_2^2}\Big)$$

ist bijektiv und hat die Umkehrabbildung

$$\Phi^{-1}(y) = \Big(\frac{y_1}{\|y\|_2}, \ldots, \frac{y_{n-1}}{\|y\|_2}, \|y\|_2\Big)$$

(Nachrechnen!). Offenbar ist also Φ ein Diffeomorphismus.

Sei $F(x) := \sqrt{1 - \|x\|_2^2}$. Dann ist $(\operatorname{grad} F)(x) = -\frac{x}{F(x)}$ (als Zeilenvektor) sowie $\Phi(x,r) = (rx, rF(x)) = r(x, F(x))$. Folglich ist

$$J_{(x,r)}(\Phi) = \begin{pmatrix} r & 0 & \dots & 0 & x_1 \\ 0 & r & \dots & 0 & x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r & x_{n-1} \\ \multicolumn{4}{c}{r(\operatorname{grad} F)(x)} & F(x) \end{pmatrix}.$$

Ausklammern von r und Subtraktion des x_j–fachen der j. Spalte von der letzten Spalte liefern

$$\begin{aligned}
\det J_{(x,r)}(\Phi) &= r^{n-1}\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & x_{n-1} \\ \multicolumn{4}{c}{(\operatorname{grad} F)(x)} & F(x) \end{pmatrix} \\
&= r^{n-1}\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{(\operatorname{grad} F)(x)} & F(x) - \langle (\operatorname{grad} F)(x), x\rangle \end{pmatrix} \\
&= r^{n-1}\Big(F(x) - \Big\langle (\operatorname{grad} F)(x), x \Big\rangle\Big) = r^{n-1}\Big(F(x) + \frac{\|x\|_2^2}{F(x)}\Big) \\
&= \frac{r^{n-1}}{F(x)}\Big(F(x)^2 + \|x\|_2^2\Big) = \frac{r^{n-1}}{\sqrt{1 - \|x\|_2^2}}\,.
\end{aligned}$$

Mit der Transformationsformel und dem Satz von Fubini ergibt sich daher

$$\begin{aligned}
\int_{H_+} f d\lambda_n &= \int_{U\times(0,\infty)} f(rx, r\sqrt{1 - \|x\|_2^2})\frac{r^{n-1}}{\sqrt{1 - \|x\|_2^2}}\, d\lambda_{n-1}(x) dr \\
&= \int_0^\infty \int_U \frac{f(rx, r\sqrt{1 - \|x\|_2^2})}{\sqrt{1 - \|x\|_2^2}}\, r^{n-1} d\lambda_{n-1}(x) dr.
\end{aligned}$$

Nach (4.9) ist das innere Integral gleich $\int_{S_r} f dS_{S_r}$. Hieraus folgt die erste Gleichheit in (4.11), und die zweite bekommt man mit (4.10). ■

Beispiel 4 Sei $B_n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \leq 1\}$ und $\mathbb{S}^{n-1} = \partial B_n$. Wir wollen das $(n-1)$–dimensionale Volumen $w_n := \operatorname{vol}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})$ der $(n-1)$–dimensionalen Einheitsphäre $\mathbb{S}^{n-1}$ berechnen. Wir erinnern daran, dass das ("gewöhnliche") n–dimensionale Volumen von B_n durch $c_n = \operatorname{vol}_n(B_n) = \pi^{n/2}/\Gamma(\frac{n}{2}+1)$ gegeben ist. Wir wenden nun Satz 4.10 auf die charakteristische Funktion von B_n an und finden

$$c_n = \int_{\|x\|_2 \leq 1} d\lambda_n(x) = \int_0^1 \int_{\|x\|=1} dS_{\mathbb{S}^{n-1}}(y) r^{n-1} dr = w_n \int_0^1 r^{n-1} dr = \frac{w_n}{n}.$$

Somit ist

$$w_n = nc_n = n\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} = 2\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}.$$

Insbesondere erhalten wir

- $w_2 = 2\pi$ (Länge des Einheitskreisbogens)
- $w_3 = 4\pi$ (Oberfläche der zweidimensionalen Einheitssphäre)
- $w_4 = 2\pi^2$ (dreidimensionales Volumen von $\mathbb{S}^3 \subseteq \mathbb{R}^4$).