3 Volumenintegrale und Transformationsformel

Nachdem wir uns in den ersten beiden Kapiteln mit recht abstrakten Konstruktionen beschäftigt haben, wenden wir uns nun der Berechnung konkreter Lebesgue–Integrale zu. Als erstes lernen wir den Satz von Fubini kennen, der es erlaubt, Integrale über $\mathbb{R}^n$ auf Integrale über $\mathbb{R}$ zurückzuführen. Dann sehen wir uns das mehrdimensionale Analogon der Substitutionsregel – die Transformationsformel – an. In der Praxis ist die Transformationsformel oft nicht unmittelbar benutzbar, da die Transformationen Singularitäten aufweisen können (z.B. bei Polarkoordinaten). Andererseits liegen diese Singularitäten oft in Nullmengen und beeinflussen daher das Ergebnis einer Integration nicht. Wir diskutieren daher im dritten Abschnitt einige Methoden zum Nachweis, dass eine Menge eine Nullmenge ist. Schließlich ist der vierte Abschnitt einigen konkreten Beispielen gewidmet.

3.1 Der Satz von Fubini und seine Anwendungen

Die Berechnung mehrdimensionaler Integrale oder der Volumina mehrdimensionaler Körper ist oft nicht leicht. Man versucht daher, die Berechnung mehrdimensionaler Integrale auf die Berechnung mehrerer Integrale in niedrigeren Dimensionen zu reduzieren. Das wichtigste Werkzeug dazu ist der folgende Satz, den wir aus Zeitgründen nicht beweisen werden. Sie finden einen Beweis z.B. in Bröcker, Analysis II, und in Bauer.

Satz 3.1 (Satz von Fubini) *(a) Sei $f : \mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to [0, \infty]$ messbar. Dann sind für jedes $y \in \mathbb{R}^m$ und jedes $x \in \mathbb{R}^n$ die Funktionen*

$$f_y := f(\cdot, y) : \mathbb{R}^n \to [0, \infty] \ \textit{ und } \ f_x := f(x, \cdot) : \mathbb{R}^m \to [0, \infty]$$

messbar. Weiter sind die Funktionen

$$F : \mathbb{R}^m \to [0, \infty], \ y \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f_y d\lambda_n \ \textit{ und } \ G : \mathbb{R}^n \to [0, \infty], \ x \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} f_x d\lambda_m$$

messbar, und es gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{n+m}} f d\lambda_{n+m} &= \int_{\mathbb{R}^m} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) d\lambda_n(x) \Big) d\lambda_m(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) d\lambda_m(y) \Big) d\lambda_n(x). \end{aligned} \tag{3.1}$$

(b) Ist $f \in \mathfrak{L}^1(\mathbb{R}^{n+m})$, so sind die Funktionen f_y bzw. f_x für fast alle $y \in \mathbb{R}^n$ bzw. $x \in \mathbb{R}^n$ Lebesgue–integrierbar. Weiter sind die fast überall definierten Funktionen F und G Lebesgue–integrierbar, und es gilt wieder (3.1).

In Zukunft schreiben wir nur noch *integrierbar* statt *Lebesgue–integrierbar*. Eine wichtige Anwendung dieses Satzes ist das folgende Prinzip von Cavalieri, das besagt, dass man das Volumen einer messbaren Teilmenge M des $\mathbb{R}^n$ berechnen kann, indem man M in unendlich dünnen Schichten niedrigerer Dimension zerschneidet und die Volumina der Schichten aufintegriert.

Satz 3.2 (Prinzip von Cavalieri) *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ messbar, und für $y \in \mathbb{R}^m$ sei*

$$M_y := \{x \in \mathbb{R}^n : (x, y) \in M\}.$$

Dann ist M_y messbar, die Funktion $y \mapsto \lambda_n(M_y)$ ist messbar, und es ist

$$\lambda_{n+m}(M) = \int_{\mathbb{R}^m} \lambda_n(M_y) d\lambda_m(y).$$

Beweis Wir wenden Satz 3.1 (a) auf die Funktion χ_M an und erhalten

$$\begin{aligned} \lambda_{n+m}(M) &= \int_{\mathbb{R}^{n+m}} \chi_M d\lambda_{n+m} = \int_{\mathbb{R}^m} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} \chi_M(x, y) d\lambda_n(x) \Big) d\lambda_m(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{M_y} d\lambda_n \Big) d\lambda_m(y) = \int_{\mathbb{R}^m} \lambda_n(M_y) d\lambda_m(y). \end{aligned}$$

■

Mit diesem Prinzip können wir testen, ob unsere naive Vorstellung aus der Analysis I, dass das Integral einer nichtnegativen Funktion die Fläche unter dem Graphen der Funktion beschreibt, gerechtfertigt war.

Folgerung 3.3 *Sei $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ eine messbare Funktion. Dann ist die Menge*

$$M^f := \Big\{ (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1 = \mathbb{R}^{n+1} : 0 \leq t < f(x) \Big\}$$

messbar, und ihr Maß ist

$$\lambda_{n+1}(M^f) = \int_{\mathbb{R}^n} f d\lambda_n.$$

Beweis Mit f sind auch die Funktionen $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, t) \mapsto f(x)$ und $(x, t) \mapsto t$ messbar (HA). Daher ist auch $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, t) \mapsto f(x) - t$ messbar, und folglich ist die Menge

$$\begin{aligned} M^f &= \Big\{ (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : t \geq 0 \text{ und } f(x) - t > 0 \Big\} \\ &= \Big\{ (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : t \geq 0 \Big\} \cap \Big\{ (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : H(x, t) > 0 \Big\} \end{aligned}$$

messbar. Für $x \in \mathbb{R}^n$ ist

$$(M^f)_x = \Big\{ t \in \mathbb{R} : (x, t) \in M^f \Big\} = \Big[0, f(x) \Big)$$

und daher $\lambda_1((M^f)_x) = f(x)$. Mit Satz 3.2 ergibt sich also

$$\lambda_{n+1}(M_f) = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda_1\Big((M^f)_x\Big) d\lambda_n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) d\lambda_n(x). \qquad \blacksquare$$

Als eine Anwendung wollen wir das Volumen $c_n := \lambda_n(B_n)$ der n–dimensionalen Einheitskugel $B_n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \leq 1\}$ berechnen. Offenbar ist $c_1 = \lambda_1([-1,1])$ $= 2$, und aus der Schule wissen wir, dass wir $c_2 = \pi$ erwarten sollten. Wir gehen nach dem Cavalierischen Prinzip vor und zerschneiden für $n > 1$ die Kugel B_n in die Scheiben

$$\begin{aligned} B_{n,s} &= \{x' \in \mathbb{R}^{n-1} : (x', s) \in B_n\} \\ &= \Big\{x' \in \mathbb{R}^{n-1} : \|x'\|_2 \leq \sqrt{1-s^2}\Big\} = \sqrt{1-s^2}\, B_{n-1} \end{aligned}$$

für $s \in [-1,1]$ und $B_{n,s} = \emptyset$ sonst. Mit Folgerung 1.21 und Satz 3.2 erhalten wir

$$c_n = \int_{-1}^{1} \lambda_{n-1}(B_{n,s}) ds = \int_{-1}^{1} (1-s^2)^{\frac{n-1}{2}} c_{n-1} ds = c_{n-1} \int_{-1}^{1} (1-s^2)^{\frac{n-1}{2}}\, ds.$$

Damit ist die rekursive Berechnung von c_n auf die Berechnung der Riemann–Integrale

$$I_n := \int_{-1}^{1} (1-s^2)^{\frac{n-1}{2}}\, ds$$

zurückgeführt. Mit der Substitution $s(t) = \sin t$, $t \in [-\frac{\pi}{2}\, \frac{\pi}{2}]$, folgt

$$I_n = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 t)^{\frac{n-1}{2}} \cos t\, dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n dt.$$

Diese Integrale berechnen wir rekursiv mit partieller Integration. Für $n > 1$ ist

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos t)^{n-1} \cdot \cos t\, dt \\ &= (\sin t)(\cos t)^{n-1}\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin t)(n-1)(\cos t)^{n-2}(-\sin t) dt \\ &= (n-1) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1-\cos^2 t)(\cos t)^{n-2} dt = (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir für $n > 1$ die Rekursionsformel $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$, und mit den bekannten Werten $I_0 = \pi$ und $I_1 = 2$ finden wir

$$I_{2n} = \frac{(2n-1)(2n-3) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 1}{2n(2n-2) \cdot \ldots \cdot 4 \cdot 2} \pi = \frac{(n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2}) \cdot \ldots \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}}{n(n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1} \pi = \binom{n-\frac{1}{2}}{n} \pi$$

und

$$\begin{aligned}
I_{2n+1} &= \frac{2n(2n-2)\cdot\ldots\cdot 4\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\cdot\ldots\cdot 5\cdot 3}\cdot 2\\
&= \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{(n+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2})\cdot\ldots\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}}\cdot 2 = \binom{n+\frac{1}{2}}{n}^{-1}\cdot 2.
\end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich

$$I_{2n+1}I_{2n} = \frac{2\pi}{2n+1} \quad \text{und} \quad I_{2n}I_{2n-1} = \frac{\pi}{n},$$

woraus wir

$$\begin{aligned}
c_{2n} &= I_{2n}c_{2n-1} = I_{2n}I_{2n-1}c_{2n-2} = \frac{\pi}{n}\,c_{2n-2} = \frac{\pi^{n-1}}{n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2}c_2\\
&= \frac{\pi^{n-1}}{n!}\,I_2c_1 = \frac{\pi^{n-1}}{n!}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 2 = \frac{\pi^n}{n!}
\end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned}
c_{2n+1} &= I_{2n+1}I_{2n}c_{2n-1} = \frac{2\pi}{2n+1}\,c_{2n-1}\\
&= \frac{(2\pi)^n}{(2n+1)\cdot(2n-1)\cdot\ldots\cdot 3}\,c_1 = \frac{2^{n+1}\pi^n}{(2n+1)\cdot\ldots\cdot 3}
\end{aligned}$$

erhalten. Insbesondere ist also tatsächlich $c_2 = \pi$ und $c_3 = \frac{4}{3}\pi$.

Mit Hilfe der Gammafunktion

$$\Gamma : (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$$

kann man die Formel für die Volumina c_n einheitlich als

$$c_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} \tag{3.2}$$

schreiben. Dazu erinnern wir an die Rekursionsformel $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ für $x > 0$ und an die Identität $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ (vgl. Tutorium Analysis II). Mit diesen Hinweisen sollten Sie (3.2) leicht bestätigen können.

3.2 Die Transformationsformel

In diesem Abschnitt lernen wir das Analogon der eindimensionalen Substitutionsregel kennen, die wir uns zunächst noch einmal anschauen. Ist $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$

eine stetig differenzierbare und streng monoton wachsende Funktion und ist $f : \varphi([a,b]) \to \mathbb{R}$ stetig, so ist

$$\int_a^b (f \circ \varphi)(t)\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx$$

bzw., als Lebesgue–Integral geschrieben,

$$\int_{[a,b]} (f \circ \varphi)(t)\varphi'(t)dt = \int_{\varphi([a,b])} f(x)dx.$$

Ist dagegen φ monoton fallend, d.h. orientierungsumkehrend, so ist

$$\int_a^b (f \circ \varphi)(t)\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = -\int_{\varphi(b)}^{\varphi(a)} f(x)dx = -\int_{\varphi([a,b])} f(x)dx.$$

Diese beiden Identitäten lassen sich zu

$$\int_{[a,b]} (f \circ \varphi)(t)|\varphi'(t)|dt = \int_{\varphi([a,b])} f(x)dx \tag{3.3}$$

zusammenfassen, und das ist die Transformationsformel, die wir auf höhendimensionale Situationen verallgemeinern wollen. Wir werden dazu auch die Schreibweise $\int_B f(x)dx$ statt $\int_B f d\lambda$ verwenden. Außerdem erinnern wir daran, dass eine bijektive Abbildung $\varphi : U \to V$ zwischen offenen Mengen U und V im $\mathbb{R}^n$ ein *Diffeomorphismus* heißt, wenn φ und φ^{-1} stetig differenzierbar sind.

Satz 3.4 (Transformationsformel) *Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi : U \to V$ ein Diffeomorphismus. Dann ist eine Funktion $f : V \to \mathbb{R}$ genau dann über V integrierbar, wenn die Funktion $(f \circ \varphi)|\det \varphi'| : U \to \mathbb{R}$ über U integrierbar ist. In diesem Fall ist*

$$\int_V f(y)dy = \int_U f\Big(\varphi(x)\Big)|\det \varphi'(x)|dx. \tag{3.4}$$

Insbesondere gilt für jede messbare Teilmenge $A \subseteq U$

$$\lambda_n\Big(\varphi(A)\Big) = \int_A |\det \varphi'(x)|dx. \tag{3.5}$$

Hier steht $\varphi'(x) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ für die Ableitung von $\varphi : U \to V$ in $x \in U$. Vor dem Beweis von Satz 3.4 machen wir uns klar, was die Transformationsformel bedeutet. Der wesentliche Teil ist Formel (3.5), die angibt, wie sich das Volumen des Bildes einer messbaren Menge A unter φ berechnet. Ist insbesondere $|\det \varphi'(x)|$ eine von x unabhängige Konstante c, so reduziert sich (3.5) auf $\lambda_n(\varphi(A)) = c\lambda_n(A)$. Die Konstante c ist also ein Verzerrungsfaktor, der angibt, wie sich das Volumen einer Menge bei Anwendung von φ ändert. Ist beispielsweise $\varphi = T\big|_U$ mit einer linearen Abbildung T, so ist $\varphi'(x) = T$ und somit $\lambda_n(T(A)) = |\det T| \cdot \lambda_n(A)$. Für $U = \mathbb{R}^n$ und $A = [0,1]^n$ (Einheitswürfel im $\mathbb{R}^n$) ergibt sich mit

$$\lambda_n\Big(T([0,1]^n)\Big) = |\det T|$$

eine anschauliche Bedeutung der Determinante als Volumen des Bildes des Einheitswürfels. Eine Menge der Gestalt $T([0,1]^n)$ heißt auch *Spat* oder *Parallelotop*. Man kann sie schreiben als $\{\sum_{j=1}^n x_j a_j : x_j \in [0,1]$ für alle $j\}$, wobei die a_j die Bilder der kanonischen Basisvektoren unter T sind.

Beweis der Transformationsformel *1. Schritt: Es genügt,* (3.5) *zu beweisen.* Aus (3.5) erhält man unmittelbar (3.4) für die Funktion $f = \chi_{\varphi(A)}$, denn es ist ja $\chi_{\varphi(A)} \circ \varphi = \chi_A$. Aus der Linearität des Integrals folgt damit (3.4) für den Fall, dass f eine nichtnegative Stufenfunktion ist. Für den allgemeinen Fall reicht es aus, nichtnegative Funktionen zu betrachten. Sei also $f \geq 0$ messbar. Nach Satz 2.2 gibt es eine monoton wachsende Folge (f_k) von Stufenfunktionen, die punktweise gegen f konvergiert. Aus dem Satz über monotone Kovergenz (Satz 2.11) folgt dann

$$\begin{aligned} \int_V f(y)dy &= \lim_{k\to\infty} \int_V f_k(y)dy = \lim_{k\to\infty} \int_U f_k\Big(\varphi(x)\Big)|\det \varphi'(x)|dx \\ &= \int_U f\Big(\varphi(x)\Big)|\det \varphi'(x)|dx, \end{aligned}$$

da auch die Folge $(f_k \circ \varphi)|\det \varphi'|$ monoton wachsend ist und punktweise gegen $(f \circ \varphi)|\det \varphi'|$ konvergiert. Insbesondere sehen wir, dass $(f \circ \varphi)|\det \varphi'|$ genau dann auf U integrierbar ist, wenn f auf V integrierbar ist. Es verbleibt, (3.5) zu zeigen.

2. Schritt: Es genügt, die Aussage für den Fall zu zeigen, dass jeder Punkt $p \in U$ eine offene Umgebung $W_p \subseteq U$ hat, so dass (3.5) *für W_p anstelle von U und für $\varphi\big|_{W_p}$ anstelle von φ gilt.* Für jeden Punkt $p \in U$ gibt es einen Punkt $q \in \mathbb{Q}^n$ und eine Kugel $U_r(q)$ mit rationalem Radius so, dass $p \in U_r(q) \subseteq W_p$. Die Behauptung (3.5) gilt für jede der abzählbar vielen Mengen $U_r(q)$, und diese Mengen überdecken U. Wir haben also abzählbar viele Mengen $(M_k)_{k\geq 1}$ gefunden, für die (3.5) gilt und die U überdecken. Ist nun $A \subseteq U$ messbar, so schreiben wir A als disjunkte Vereinigung der Mengen

$$A_1 := A \cap M_1 \quad \text{und} \quad A_k := (A \cap M_k) \setminus (M_1 \cup \ldots \cup M_{k-1}) \quad \text{für } k \geq 2.$$

Aus der σ–Additivität von λ_n und aus Satz 2.6 folgt nun

$$\lambda_n\Big(\varphi(A)\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n\Big(\varphi(A_k)\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} |\det \varphi'(x)|dx = \int_A |\det \varphi'(x)|dx.$$

3. Schritt: (3.5) *gilt, wenn φ eine Permutation der Koordinaten ist, d.h. wenn $\varphi(x) = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$ mit einer Bijektion $\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$.* In diesem Fall ist $|\det \varphi'(x)| = 1$, und (3.5) gilt offenbar für alle achsenparallelen Quader in $\mathbb{R}^n$. Nach dem Eindeutigkeitssatz für das Lebesgue–Maß (Satz 1.18) folgt die Formel (3.5) für beliebiges messbares A.

4. Schritt: (3.5) *gilt, falls $n = 1$ und U ein Intervall ist.* Wir benutzen wieder den Eindeutigkeitssatz (Satz 1.18). Ist $B \subseteq V$ ein Intervall, so ist auch $\varphi^{-1}(B) \subseteq U$ ein Intervall (da φ^{-1} stetig ist), und es ist

$$\lambda(B) = \int_{\varphi^{-1}(B)} |\varphi'(x)| dx$$

(Anwendung der Substitutionsregel (3.3) auf die Funktion $f \equiv 1$). Da

$$B \mapsto \lambda(B \cap V) \quad \text{und} \quad B \mapsto \int_{\varphi^{-1}(B \cap V)} |\varphi'(x)| dx$$

nach Satz 2.6 Maße auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ definieren und diese auf allen beschränkten Intervallen übereinstimmen, stimmen sie nach Satz 1.18 überein.

5. Schritt: Gilt (3.5) *für die Diffeomorphismen $\varphi_1 : U_1 \to U_2$ und $\varphi_2 : U_2 \to U_3$, so gilt* (3.5) *auch für den Diffeomorphismus $\varphi_2 \circ \varphi_1 : U_1 \to U_3$.* Aus Schritt 1 wissen wir, dass (3.5) die Formel (3.4) nach sich zieht. Nach der Kettenregel ist nun

$$\det\Big((\varphi_2 \circ \varphi_1)'(x)\Big) = \det\Big(\varphi_2'(\varphi_1(x))\Big) \cdot \det \varphi_1'(x). \tag{3.6}$$

Wenden wir (3.5) auf φ_2 und (3.4) auf φ_1 an, erhalten wir

$$\begin{aligned}
\lambda_n\Big((\varphi_2 \circ \varphi_1)(A)\Big) &= \int_{\varphi_1(A)} |\det \varphi_2'(y)| dy && \text{(nach (3.5))} \\
&= \int_A \Big|\det \varphi_2'\Big(\varphi_1(x)\Big)\Big| \cdot \Big|\det \varphi_1'(x)\Big| dx && \text{(nach (3.4))} \\
&= \int_A |\det(\varphi_2 \circ \varphi_1)'(x)| dx. && \text{(nach (3.6))}
\end{aligned}$$

6. Schritt Nun wird es ernst: *Wir zeigen die lokale Aussage aus Schritt 2 durch vollständige Induktion nach n.*
Der Induktionsanfang $n = 1$ ist in Schritt 4 abgehandelt. Für den Induktionsschritt betrachten wir φ in einer Umgebung von $p \in U$. Wegen $\det \varphi'(p) \neq 0$ gibt es ein j mit $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j}(p) \neq 0$. Indem wir φ mit einer Koordinatenpermutation verknüpfen, dürfen wir nach Schritt 3 und 5 o.B.d.A. annehmen, dass $j = 1$, d.h. dass

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(p) \neq 0$$

ist. Wir betrachten die Abbildung

$$\psi : U \to \mathbb{R}^n, \;\; x \mapsto \Big(\varphi_1(x), x_2, \dots, x_n\Big).$$

Die Jabocimatrix von ψ in x (d.h. die Matrix von $\psi'(x)$ bzgl. der natürlichen Basis des $\mathbb{R}^n$) hat die Blockstruktur

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}(x) & * \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix},$$

ist also insbesondere in $x = p$ invertierbar. Nach dem Satz über die Umkehrfunktion (Analysis II, Satz 12.5) dürfen wir nach einer gegebenenfalls erforderlichen Verkleinerung von U annehmen, dass $\psi : U \to \psi(U)$ ein Diffeomorphismus ist. Wir haben damit eine Zerlegung

$$\varphi = \rho \circ \psi : U \to V \quad \text{mit} \quad \rho = \varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U) \to V.$$

Die erste Komponente von ρ ist dann gegeben durch

$$\rho_1(y) = (\varphi_1 \circ \psi^{-1})(y) = (\psi_1 \circ \psi^{-1})(y) = y_1.$$

Nach Schritt 5 genügt es, die Behauptung für die Abbildungen ψ und ρ zu zeigen. Wir dürfen also annehmen, dass φ eine der Funktionen ψ oder ρ ist. Beiden Funktionen gemeinsam ist, dass es ein j gibt mit $\varphi_j(x) = x_j$ für alle $x \in U$. Indem wir wieder geeignet permutieren, können wir nach Schritt 3 sogar $\varphi_1(x) = x_1$ für alle $x \in U$ annehmen. Wir können φ daher wie folgt schreiben:

$$\varphi(t, x') = \Big(t, \varphi_t(x')\Big) \quad \text{mit} \quad (t, x') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1},$$

wobei

$$\varphi_t : U_t := \Big\{x' \in \mathbb{R}^{n-1} : (t, x') \in U\Big\} \to V_t := \Big\{x' \in \mathbb{R}^{n-1} : (t, x') \in V\Big\}$$

ein Diffeomorphismus ist. Die Jacobi–Matrix $J_x(\varphi)$ von φ in $x = (t, x')$ hat die Struktur

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & J_{x'}(\varphi_t) \end{pmatrix},$$

so dass gilt

$$\det \varphi'(x) = \det(\varphi_t)'(x'). \tag{3.7}$$

Für eine messbare Teilmenge A von U erhalten wir nun schrittweise

$$\begin{aligned}
\lambda_n\Big(\varphi(A)\Big) &= \int_{\mathbb{R}} \lambda_{n-1}\Big(\varphi(A)_t\Big)dt && \text{(Cavalieri)} \\
&= \int_{\mathbb{R}} \lambda_{n-1}\Big(\varphi_t(A_t)\Big)dt && \text{(Definition von } \varphi_t\text{)} \\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_{A_t} |\det(\varphi_t)'(x')|dx'dt && \text{(Induktionsannahme)} \\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi_{A_t}(x')|\det(\varphi_t)'(x')|dx'dt && \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A(x)|\det\varphi'(x)|dx && \text{(Fubini und (3.7))} \\
&= \textstyle\int_A |\det\varphi'(x)|dx. &&
\end{aligned}$$

■

Wir halten noch eine wichtige Folgerung fest. Ist $T \in L(\mathbb{R}^n)$ eine Isometrie (d.h. wird T durch eine orthogonale Matrix dargestellt), so heißt die Abbildung $x \mapsto Tx$ eine *Drehung* des $\mathbb{R}^n$.

Folgerung 3.5 (Drehungsinvarianz des Lebesgue-Maßes) *Für jede Drehung des $\mathbb{R}^n$ und jede Borelmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt $\lambda_n(T(A)) = \lambda_n(A)$.*

Beweis Aus $TT^T = I$ folgt $(\det T)^2 = 1$. Also ist $|\det T| = 1$, und die Behauptung folgt sofort aus (3.5). ■

Diese Drehungsinvarianz ist nicht von vorherein klar, da wir ja das Lebesgue–Maß basisabhängig konstruiert haben (nämlich zunächst auf Quadern, die parallel zu den Koordinatenachsen liegen). Weiter sei daran erinnert, dass wir die Translationsinvarianz des Lebesgue–Maßes bereits in der Übung gezeigt haben. Zusammenfassend können wir feststellen, dass das Lebesgue–Maß unter Abbildungen der Gestalt $\varphi(x) = Tx + v$ mit einer linearen Isometrie $T \in L(\mathbb{R}^n)$ und einem Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ invariant ist.

3.3 Nullmengen

Wir haben Nullmengen als Teilmengen von Borelmengen vom Lebesguemaß 0 definiert. Wir wollen nun einige Kriterien kennenlernen, die es uns erlauben, gewisse Nullmengen schnell als solche zu erkennen. Dies ist z.B. bei Anwendungen der Transformationsformel nützlich, bei denen man aus dem Definitionsgebiet gewisse Nullmengen herausschneiden muss, um die Transformation zu einem Diffeomorphismus zu machen. In diesem Zusammenhang sei an Lemma 1.23 erinnert, das wir im Beweis des folgenden Satzes benutzen werden.

Satz 3.6 *Ist $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge und $f : A \to \mathbb{R}^n$ Lipschitzstetig, so ist auch $f(A)$ eine Nullmenge.*

Beweis Sei $\varepsilon > 0$ und $(W_k)_{k\geq 1}$ eine Folge von Würfeln mit $A \subseteq \cup_{k\geq 1} W_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n(W_k) < \varepsilon$. Wir dürfen annehmen, dass jeder Würfel W_k einen Punkt $a_k \in A$ enthält. Ist s_k die Kantenlänge von W_k, so ist $\lambda_n(W_k) = s_k^n$ und $\|x - a_k\| \leq \sqrt{n} \cdot s_k$ für alle $x \in W_k$ (warum?).
Da f Lipschitzstetig ist, gibt es ein $L > 0$ so, dass

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\| \quad \text{für alle } x, y \in A.$$

Insbesondere ist für alle $x \in A \cap W_k$

$$\|f(x) - f(a_k)\| \leq L\|x - a_k\| \leq L\sqrt{n}\, s_k.$$

Also liegt $f(A \cap W_k)$ in einer Kugel vom Radius $L\sqrt{n}\, s_k$ und damit auch in einem Würfel $\tilde{W}_k$ mit der Kantenlänge $2L\sqrt{n}\, s_k$. Es ist also

$$f(A) = \bigcup_{k\geq 1} f(A \cap W_k) \subseteq \bigcup_{k\geq 1} \tilde{W}_k$$

mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n(\tilde{W}_k) = \sum_{k=1}^{\infty} (2L\sqrt{n}\, s_k)^n = (2L\sqrt{n})^n \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n(W_k) \leq (2L\sqrt{n}\,)^n \cdot \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt werden kann, ist $f(A)$ eine Nullmenge. ∎

Folgerung 3.7 *Ist A Nullmenge in $\mathbb{R}^n, U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $A \subseteq U$ und $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, so ist $f(A)$ eine Nullmenge in $\mathbb{R}^n$.*

Beweis Da U offen ist, ist U eine abzählbare Vereinigung von Quadern der Gestalt $Q_k = [a_k, b_k]$ mit $a_k, b_k \in \mathbb{Q}^n$ (vgl. Beweis von Lemma 1.4). Als stetige Funktion ist $f' : U \to L(\mathbb{R}^n)$ auf jedem der kompakten Quader Q_k beschränkt, d.h. es gibt ein $L_k > 0$ mit $\|f'(x)\| \leq L_k$ für alle $x \in Q_k$. Nach Satz 10.19 aus Analysis II folgt

$$\|f(y) - f(z)\| \leq L_k\|y - z\| \quad \text{für alle } \; y, z \in Q_k.$$

Also ist $f\big|_{Q_k}$ Lipschitzstetig, und nach Satz 3.6 ist $f(A \cap Q_k)$ Nullmenge. Dann ist auch $f(A) = \cup_{k=1}^{\infty} f(A \cap Q_k)$ eine Nullmenge (Lemma 8.13 aus Ana II). ∎

Satz 3.6 und Folgerung 3.7 lassen sich *nicht* auf beliebige stetige Funktionen f verallgemeinern. Es gibt beispielsweise Kurven (sogenannte *Peano–Kurven*), die ein ganzes Quadrat im $\mathbb{R}^2$ ausfüllen.

Lemma 3.8 *Jeder echte affine Unterraum $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine Nullmenge.*

Beweis Wir verschieben A so, dass $0 \in A$, und drehen dann A so, dass $A \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$. Nach Folgerung 3.5 und der Anmerkung danach dürfen wir also o.E.d.A. $A = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ annehmen. Wir können A dann schreiben als

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Big([-k, k]^{n-1} \times \{0\} \Big),$$

und aus $\lambda_n([-k,k]^{n-1} \times \{0\}) = 0$ und der σ–Additivität folgt mit Lemma 1.17 (e), dass $\lambda_n(A) = 0$. ∎

Folgerung 3.9 *Ist $A \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar und $f : A \to \mathbb{R}$ messbar, so ist der Graph*

$$\Gamma(f) = \Big\{ (x, f(x)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : x \in A \Big\} \tag{3.8}$$

eine Nullmenge in $\mathbb{R}^{n+1}$.

Beweis Wir setzen f durch 0 auf $\mathbb{R}^n$ fort. Diese Fortsetzung ist messbar (warum?), und ihr Graph enthält den Graphen (3.8) als Teilmenge. Wir können daher $A = \mathbb{R}^n$ annehmen. Dann ist der Graph $\Gamma(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : y - f(x) = 0\}$ als Nullstellenmenge einer messbaren Funktion messbar, und aus dem Cavalierischen Prinzip erhalten wir

$$\lambda_{n+1}\Big(\Gamma(f)\Big) = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda_1\Big(\{f(x)\}\Big) d\lambda_n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} 0 d\lambda_n = 0.$$ ∎

3.4 Koordinatentransformationen

Oft lassen sich vorhandene Symmetrien dadurch ausnutzen, dass man Integrationsbereiche durch Koordinatentransformationen (d.h. durch eine geeignete Parametrisierung) in Quader überführt, auf denen Integrale iterativ berechnet werden können. Aus der Fülle der möglichen Koordinatensysteme sehen wir uns hier nur sphärische Polarkoordinaten an und behandeln die Zylinderkoordinaten in der Übung.

Polarkoordinaten in der Ebene. Der Übergang von Polar– zu kartesischen Koordinaten in der Ebene wird beschrieben durch

$$P : [0, \infty) \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \ \ (r, \varphi) \mapsto (r \cos \varphi, r \sin \varphi). \tag{3.9}$$

Die Jacobimatrix von P in (r, φ) ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix},$$

und ihre Determinante ist gleich r. Man beachte, dass nur die Einschränkung von P auf die offene Menge $(0, \infty) \times (0, 2\pi)$ einen Diffeomorphismus auf die Menge $\mathbb{R}^2 \setminus$

$([0,\infty)\times\{0\})$ liefert (warum?). Um einen Diffeomorphismus zu erhalten, mussten wir also sowohl aus $[0,\infty)\times[0,2\pi]$ als auch aus $\mathbb{R}^2$ eine Nullmenge herausnehmen. Daher ist eine Funktion $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ nach der Transformationsformel (Satz 3.4) genau dann integrierbar, wenn die Funktion

$$(r,\varphi)\mapsto f\Big(P(r,\varphi)\Big)|\det P'(r,\varphi)| = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot r$$

auf $[0,\infty)\times[0,2\pi]$ integrierbar ist (Nullmengen dürfen wir unberücksichtigt lassen), und es gilt in diesem Fall

$$\int_{\mathbb{R}^2} f d\lambda_2 = \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)d\lambda_2(x,y) = \int_0^\infty\int_0^{2\pi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rd\rho dr. \tag{3.10}$$

Wichtig ist, vor Anwendung der Transformationsformel zu prüfen, ob die "Ausnahmemengen" auf beiden Seiten Nullmengen sind.

Beispiel 1 Als Anwendung von (3.10) berechnen wir das Integral $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx$. Dazu betrachten wir die Funktion

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\quad (x,y)\mapsto e^{-x^2-y^2}.$$

Diese ist rotationssymmetrisch, und mit Polarkoordinaten, (3.10) und der Substitution $s=r^2$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dx\,dy &= \int_0^\infty\int_0^{2\pi} e^{-r^2}rd\varphi dr = 2\pi\int_0^\infty e^{-r^2}rdr = \pi\int_0^\infty e^{-s}ds \\ &= \pi\lim_{t\to\infty} -e^{-s}\Big|_0^t = \pi\lim_{t\to\infty}(1-e^{-t}) = \pi.\end{aligned}$$

Insbesondere ist also f integrierbar. Mit Fubini erhalten wir andererseits

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dx\,dy &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}e^{-y^2}dx\,dy = \int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx\Big)e^{-y^2}dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx\cdot\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}dy = \Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx\Big)^2,\end{aligned}$$

so dass schließlich

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi} \tag{3.11}$$

folgt. Dieses Integral spielt in der Wahrscheinlichkeitstheorie eine zentrale Rolle. ■

Beispiel 2: Die Beta–Funktion. Die Identität (3.11) eröffnet uns einen weiteren Weg, um $\Gamma(1/2)$ zu berechnen. Mit der Substitution $x=\sqrt{t}$ erhalten wir

$$\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt = \int_0^\infty \frac{e^{-x^2}}{x}2xdx = 2\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}.$$

Wir schauen uns noch an, was dieser Trick für allgemeinere Werte der Γ–Funktion liefert. Mit der Substitution $t = x^2/2$ bekommen wir

$$\Gamma(u) = \int_0^\infty t^{u-1}e^{-t}dt = 2^{1-u}\int_0^\infty x^{2(u-1)}e^{-x^2/2}x\,dx = 2^{1-u}\int_0^\infty x^{2u-1}e^{-x^2/2}dx,$$

und hiermit finden wir

$$\begin{aligned}
\Gamma(u)\Gamma(v) &= 2^{2-u-v}\int_0^\infty\int_0^\infty x^{2u-1}e^{-x^2/2}y^{2v-1}e^{-y^2/2}dx\,dy \\
&= 2^{2-u-v}\int_0^\infty\int_0^\infty x^{2u-1}y^{2v-1}e^{-(x^2+y^2)/2}dx\,dy \\
&= 2^{2-u-v}\int_0^\infty\int_0^{\pi/2} r^{2u+2v-2}(\cos\varphi)^{2u-1}(\sin\varphi)^{2v-1}e^{-r^2/2}r\,d\varphi dr \\
&= 2^{2-u-v}\int_0^\infty r^{2u+2v-1}e^{-r^2/2}dr\int_0^{\pi/2}(\cos\varphi)^{2u-1}(\sin\varphi)^{2v-1}d\varphi \\
&= \Gamma(u+v)\cdot 2\int_0^{\pi/2}(\cos\varphi)^{2u-1}(\sin\varphi)^{2v-1}d\varphi.
\end{aligned}$$

Die Funktion

$$B : (0,\infty)\times(0,\infty)\to\mathbb{R},\quad (u,v)\mapsto 2\int_0^{\pi/2}(\cos\varphi)^{2u-1}(\sin\varphi)^{2v-1}d\varphi$$

heißt *Eulersche Betafunktion*; wir haben also gerade gesehen, dass

$$B(u,v) = \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}. \tag{3.12}$$

Für $u = v = \frac{1}{2}$ erhalten wir insbesondere $B(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = 2\int_0^{\pi/2}d\varphi = \pi$. Für die Berechnung des Volumens c_n der n–dimensionalen Einheitskugel hatten wir mit dem Cavalierischen Prinzip die Rekursionsformel $c_n = c_{n-1}I_n$ mit

$$I_n = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos t)^n dt = 2\int_0^{\pi/2}(\cos t)^n dt = B\Big(\frac{n+1}{2},\frac{1}{2}\Big)$$

gefunden. Mit (3.12) ergibt sich nun direkt.

$$I_n = B\Big(\frac{n+1}{2},\frac{1}{2}\Big) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n+2}{2})} = \sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n+2}{2})}$$

und damit

$$\begin{aligned}
c_n &= c_{n-1}I_n = c_{n-2}I_nI_{n-1} = \ldots = c_1I_nI_{n-1}\ldots I_2 \\
&= 2\sqrt{\pi}^{n-1}\,\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n+2}{2})}\,\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}\cdots\frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(2)} = 2\sqrt{\pi}^{n-1}\,\frac{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n+2}{2})} = \frac{\sqrt{\pi}^n}{\Gamma(\frac{n+2}{2})}\,.
\end{aligned}$$

■

Sphärische Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^n$. Diese definieren wir rekursiv als

$$P_n : [0,\infty) \times [0,2\pi] \times [0,\pi]^{n-2} \to \mathbb{R}^n,$$

wobei

$$P_n(r,\varphi,\theta_1,\dots,\theta_{n-2}) = \Big(\sin\theta_{n-2} P_{n-1}(r,\varphi,\theta_1,\dots,\theta_{n-3}), r\cos\theta_{n-2}\Big)$$

für $n \geq 3$ und P_2 wie in (3.9) festgelegt ist. Insbesondere haben wir für die Kugelkoordinaten im $\mathbb{R}^3$

$$P_3 : [0,\infty) \times [0,2\pi] \times [0,\pi] \to \mathbb{R}^3$$

mit

$$P_3(r,\varphi,\theta) = \Big(\sin\theta P_2(r,\varphi), r\cos\theta\Big) = (r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\theta).$$

Dabei misst r den Abstand zum Ursprung, φ den Längengrad und θ den Breitengrad. Mit $\theta := (\theta_1,\dots,\theta_{n-2})$ und $\theta' := (\theta_1,\dots,\theta_{n-3})$ können wir die Jacobimatrix von P_n schreiben als

$$J_{(r,\varphi,\theta)}(P_n) = \begin{pmatrix} \sin\theta_{n-2} & \cdot & J_{(r,\varphi,\theta')}(P_{n-1}) & \cos\theta_{n-2} P_{n-1}(r,\varphi,\theta') \\ \cos\theta_{n-2} & & 0\dots0 & -r\sin\theta_{n-2} \end{pmatrix}.$$

Um davon die Determinante berechnen zu können, beachten wir, dass

$$P_{n-1}(r,\varphi,\theta') = rP_{n-1}(1,\varphi,\theta')$$

(was man leicht durch Induktion bestätigt). Damit ist

$$\frac{\partial P_{n-1}}{\partial r}(r,\varphi,\theta') = P_{n-1}(1,\varphi,\theta') = r^{-1}P_{n-1}(r,\varphi,\theta'),$$

und folglich stimmt die erste Spalte der Jacobimatrix von P_{n-1} mit $r^{-1}P_{n-1}$ überein. Also ist die Determinante der $(n-1)\times(n-1)$ Untermatrix, die man aus $J_{(r,\varphi,\theta)}(P_n)$ durch Streichen der ersten Spalte und letzten Zeile erhält, gleich

$$r(\cos\theta_{n-2})(\sin\theta_{n-2})^{n-2}(-1)^{n-2}\det P'_{n-1}(r,\varphi,\theta').$$

Damit erhalten wir durch Entwicklung von $\det P'_n(r,\varphi,\theta)$ nach der letzten Zeile

$$\begin{aligned} \det P'_m(r,\varphi,\theta) &= -r(\sin\theta_{n-2})^n \det P'_{n-1}(r,\varphi,\theta') \\ &\quad +(-1)^{n-1}r(\cos\theta_{n-2})^2(\sin\theta_{n-2})^{n-2}(-1)^{n-2}\det P'_{n-1}(r,\varphi,\theta') \\ &= -r(\sin\theta_{n-2})^{n-2}\det P_{n-1}(r,\varphi,\theta'). \end{aligned}$$

Induktiv folgt nun

$$\det P'_n(r,\varphi,\theta) = (-1)^n r^{n-1}(\sin\theta_{n-2})^{n-2}(\sin\theta_{n-3})^{n-3}\cdot\ldots\cdot(\sin\theta_1),$$

wenn man $\det P_3'(r,\varphi,\theta_1) = -r^2 \sin\theta_1$ berücksichtigt.

Diskutieren Sie als Übung zunächst im Fall $n=3$ und dann im allgemeinen Fall, welche Nullmenge man aus $[0,\infty)\times[0,2\pi]\times[0,\pi]^{n-2}$ bzw. aus dem $\mathbb{R}^n$ herausschneiden muss, damit die Einschränkung von P_n ein Diffeomophismus wird.

Als eine Anwendung wollen wir Integrale über rotationssymmetrischen Funktionen auf Kugelschalen berechnen.

Satz 3.10 *Sei $I \subseteq [0,\infty)$ ein Intervall, $K(I) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \in I\}$ die zugehörige Kugelschale und $h : I \to \mathbb{R}$ eine messbare Funktion. Dann ist die Funktion $H : K(I) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto h(\|x\|_2)$ genau dann integrierbar, wenn die Funktion $I \to \mathbb{R}$, $r \mapsto r^{n-1}h(r)$ integrierbar ist. In diesem Fall gilt*

$$\int_{K(I)} H d\lambda_n = nc_n \int_I h(r) r^{n-1} dr, \tag{3.13}$$

wobei c_n das Volumen der n–dimensionalen Einheitskugel ist.

Beweis Wir benutzen sphärische Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^n$ und beachten, dass $K(I) = P_n(I\times[0,2\pi]\times[0,\pi]^{n-2})$ ist. Da die Transformation P_n außerhalb gewisser Nullmengen ein Diffeomorphismus ist, erhalten wir mit der Transformationsformel

$$\begin{aligned}
&\int_{K(I)} H d\lambda_n \\
&= \int_I \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \cdots \int_0^{\pi} H\Big(P_n(r,\varphi,\theta)\Big)\,|\det P_n'(r,\varphi,\theta)|\, d\theta_1 \ldots d\theta_{n-2} d\varphi dr \\
&= \int_I \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \cdots \int_0^{\pi} h(r) r^{n-1} (\sin\theta_{n-2})^{n-2} (\sin\theta_{n-3})^{n-3} \\
&\qquad \ldots (\sin\theta_1) d\theta_1 \ldots d\theta_{n-2} d\varphi dr \\
&= 2\pi \int_I h(r) r^{n-1} dr \int_0^{\pi} (\sin\theta_{n-2})^{n-2} d\theta_{n-2} \cdot \ldots \cdot \int_0^{\pi} \sin\theta_1 d\theta_1.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Um die Integrale über die θ_j nicht explizit berechnen zu müssen, erinnern wir daran, dass das Integral $\int_{K(I)} H d\lambda_n$ für $I=[0,1]$ und $H \equiv 1$ gerade das Volumen der n–dimensionalen Einheitskugel liefert. Es ist also

$$\begin{aligned}
c_n &= 2\pi \int_0^1 r^{n-1} dr \int_0^{\pi} (\sin\theta_{n-2})^{n-2} d\theta_{n-2} \cdot \ldots \cdot \int_0^{\pi} \sin\theta_1 d\theta_1 \\
&= \frac{2\pi}{n} \int_0^{\pi} (\sin\theta_{n-2})^{n-2} d\theta_{n-2} \cdot \ldots \cdot \int_0^{\pi} \sin\theta_1 d\theta_1.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Ein Vergleich von (3.14) und (3.15) liefert (3.13), wobei die Aussage über die Existenz der Integrale ebenfalls aus Satz 3.4 folgt. ∎