2 Allgemeine Integrationstheorie

In diesem Abschnitt ist $(X, \mathfrak{S}, \mu)$ ein Maßraum, und wir betrachten $\overline{\mathbb{R}}$ immer mit der σ–Algebra $\mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}})$. Ziel ist es, messbare Funktionen $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ zu integrieren. Das Maß μ wird uns vorgegeben, was das Integral der charakteristischen Funktion einer messbaren Menge sein soll. Davon ausgehend definieren wir das Integral von messbaren Funktionen mit nur endlich vielen Werten (Stufenfunktionen) und dann für nichtnegative messbare Funktionen, die wir von unten durch Stufenfunktionen annähern. Schließlich spalten wir allgemeine messbare Funktionen in ihren Positiv– und Negativteil auf, für die wir die Integrale bereits definiert haben. Wir werden sehen, dass das so erklärte Lebesgue–Integral wesentlich allgemeiner und flexibler als das Riemann–Integral ist.

2.1 Stufenfunktionen

Eine messbare Funktion $s : X \to \mathbb{R}$ heißt *Stufenfunktion*, wenn $s(X)$ endlich ist. Jede konstante Funktion ist eine Stufenfunktion. Wie sieht es mit Funktionen aus, die zwei Werte annehmen? Dazu betrachten wir für jede Menge $E \subseteq X$ ihre *charakteristische Funktion*

$$\chi_E(x) := \begin{cases} 1 & \text{wenn} \quad x \in E \\ 0 & \text{wenn} \quad x \notin E. \end{cases}$$

Diese Funktion ist genau dann messbar (und damit eine Stufenfunktion), wenn $E \in \mathfrak{S}$. Insbesondere ist $\chi_{\mathbb{Q}}$ eine Stufenfunktion für $(X, \mathfrak{S}) = (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$.

Lemma 2.1 *Eine Funktion $s : X \to \mathbb{R}$ ist genau dann eine Stufenfunktion, wenn es Zahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ und paarweise disjunkte Mengen $A_1, \dots, A_k \in \mathfrak{S}$ so gibt, dass $s = \sum_{j=1}^k \alpha_j \chi_{A_j}$.*

Beweis Sind $\alpha_j \in \mathbb{R}$ und $A_j \in \mathfrak{S}$ für $j = 1, \dots, k$, so ist $\sum_{j=1}^k \alpha_j \chi_{A_j}$ messbar nach Satz 1.13 und damit Stufenfunktion. Sei umgekehrt s eine Stufenfunktion und $s(X) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ (mit paarweise verschiedenen Zahlen α_j). Dann sind die Mengen $A_j := s^{-1}(\{\alpha_j\})$ messbar und paarweise disjunkt, und es ist $s = \sum_{j=1}^k \alpha_j \chi_{A_j}$. ∎

Die folgenden Sätze zeigen, dass nichtnegative messbare Funktionen durch Stufenfunktionen approximiert werden können.

Satz 2.2 *Sei $f : X \to [0, \infty]$ eine messbare Funktion. Dann gibt es eine monoton wachsende Folge von Stufenfunktionen $s_n : X \to [0, \infty)$ so, dass*

$$\lim_{n \to \infty} s_n(x) = f(x) \quad \textit{für alle} \quad x \in X$$

und dass die Konvergenz auf jeder Menge $\{x \in X : f(x) \le c\}$ mit $c \in [0, \infty)$ gleichmäßig ist.

Beweis Für $n \geq 1$ sei

$$s_n(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{2^n} & \text{falls} \quad f(x) \in \left[\dfrac{k}{2^n}, \dfrac{k+1}{2^n}\right) \quad \text{mit } 0 \leq k \leq n \cdot 2^n - 1, \\ n & \text{falls} \quad f(x) \in [n, \infty]. \end{cases}$$

Dann ist $(s_n)_{n \geq 1}$ eine monoton wachsende Folge von Stufenfunktionen, und ist $c \in [0, \infty)$ und $n > c$, so ist

$$|f(x) - s_n(x)| < \frac{1}{2^n} \quad \text{für alle } x \text{ mit } f(x) \leq c.$$

Hieraus folgt die gleichmäßige Konvergenz auf $\{x \in X : f(x) \leq c\}$ sowie die punktweise Konvergenz auf $\{x \in X : f(x) < \infty\}$. Die punktweise Konvergenz auf $\{x \in X : f(x) = \infty\}$ ist offensichtlich. ■

Folgerung 2.3 *Eine Funktion $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ ist genau dann messbar, wenn sie punktweiser Grenzwert einer Folge von Stufenfunktionen ist.*

Beweis Punktweise Grenzwerte messbarer Funktionen sind messbar (Satz 1.15). Ist umgekehrt f messbar, so sind nach Satz 1.13 $f_+ := \max(0, f)$ und $f_- := \max(0, -f)$ messbar und nichtnegativ. Nach Satz 2.2 sind beide Funktionen punktweise Grenzwerte von Stufenfunktionen, und damit auch $f = f_+ - f_-$.

■

2.2 Das Lebesgue–Integral

Sei $(X, \mathfrak{S}, \mu)$ Maßraum, $E \in \mathfrak{S}$ und $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar. Wir definieren das Integral von f über E bzgl. des Maßes μ in mehreren Schritten.

Schritt A Sei $f = \chi_A$ mit $A \in \mathfrak{S}$. Dann setzen wir $I_E(f) := \mu(A \cap E)$.

Schritt B Sei f nichtnegative Stufenfunktion. Wir schreiben f als $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \chi_{A_j}$ mit $\alpha_j \in [0, \infty)$ und mit paarweise disjunkten Mengen $A_j \in \mathfrak{S}$ (vgl. Lemma 2.1), und wir definieren

$$I_E(f) := \sum_{j=1}^{k} \alpha_j I_E(\chi_{A_j}) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \mu(A_j \cap E).$$

Schritt C Ist f messbar und nicht negativ, so definieren wir

$$\int_E f d\mu := \sup \{I_E(s) : s \;\text{ Stufenfunktion mit } 0 \leq s \leq f\}.$$

Die Menge auf der rechten Seite ist nach Satz 2.2 nicht leer. Man beachte, dass $\int_E f d\mu$ den Wert $+\infty$ annehmen kann. Ist f selbst eine nichtnegative Stufenfunktion, so ist $\int_E f d\mu = I_E(f)$. Für alle Stufenfunktionen $0 \leq s \leq f$ ist nämlich

$I_E(s) \leq I_E(f)$.

Schritt D Nun sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar. Nach Satz 1.13 sind die Funktionen $f_+ := \max(0, f)$ und $f_- := \max(0, -f)$ messbar, und die Integrale

$$\int_E f_+ d\mu, \quad \int_E f_- d\mu \tag{2.1}$$

sind wie in Schritt C erklärt.

Definition 2.4 *Ist eines der Integrale* (2.1) *endlich, so definieren wir*

$$\int_E f d\mu := \int_E f_+ d\mu - \int_E f_- d\mu \in \overline{\mathbb{R}}. \tag{2.2}$$

Sind beide Integrale in (2.1) *endlich, so heißt* f Lebesgue–integrierbar *, und wir schreiben* $f \in \mathfrak{L}^1(\mu, E)$ *bzw.* $f \in \mathfrak{L}^1(\mu)$ *falls* $E = X$.

Man beachte, dass wir das Integral von f auch dann definiert haben, wenn f nicht Lebesgue–integrierbar ist, aber eine der Funktionen f_+, f_- diese Eigenschaft hat. Das ist in vielen Situationen bequem.
Wir sehen uns einige elementare Eigenschaften des Lebesgue–Integrals an.

Lemma 2.5 (a) *Ist* f *messbar und beschränkt auf* E *und* $\mu(E) < \infty$, *so ist* $f \in \mathfrak{L}^1(\mu, E)$.
(b) *Sind* $f, g \in \mathfrak{L}^1(\mu, E)$ *und ist* $f \leq g$ *auf* E, *so ist*

$$\int_E f\, d\mu \leq \int_E g\, d\mu.$$

(c) *Ist* f *messbar und* $a, b \in \mathbb{R}$ *mit* $a \leq f \leq b$ *auf* E *und* $\mu(E) < \infty$, *so ist*

$$a \cdot \mu(E) \leq \int_E f\, d\mu \leq b\, \mu(E).$$

(d) *Ist* $f \in \mathfrak{L}^1(\mu, E)$ *und* $c \in \mathbb{R}$, *so ist* $cf \in \mathfrak{L}^1(\mu, E)$ *und*

$$\int_E cf d\mu = c \int_E f d\mu.$$

(e) *Ist* f *messbar und* $\mu(E) = 0$, *so ist* $\int_E f d\mu = 0$.
(f) *Ist* $f \in \mathfrak{L}^1(\mu, E)$ *und* $A \in \mathfrak{S}$ *Teilmenge von* E, *so ist* $f|_A \in \mathfrak{L}^1(\mu, A)$.

Beweis (a) Sei $|f| \leq M < \infty$ auf E. Dann ist auch $f_\pm \leq M$ auf E, und hieraus folgt sofort $\int_E f_\pm d\mu \leq M\mu(E)$, denn diese Relation überträgt sich offenbar auf die entsprechenden Stufenfunktionen.
(b) Aus $f \leq g$ folgt $f_+ \leq g_+$ und $g_- \leq f_-$ auf E. Hieraus folgt

$$\int_E f_+ d\mu \leq \int_E g_+ d\mu \quad \text{und} \quad \int_E g_- d\mu \leq \int_E f_- d\mu$$

(jede Stufenfunktion s mit $0 \le s \le f_+$ erfüllt ja erst recht $0 \le s \le g_+$) und daher

$$\int_E f d\mu = \int_E f_+ d\mu - \int_E f_- d\mu \le \int_E g_+ d\mu - \int_E g_- d\mu = \int_E g d\mu.$$

(c) Dies folgt sofort aus (b), wenn wir f mit den Konstanten a, b vergleichen.
(d) Für nichtnegative Stufenfunktionen s ist trivialerweise $I_E(cs) = cI_E(s)$. Ist nun etwa $c > 0$ und $f \ge 0$, so folgt

$$\begin{aligned}\int_E cf d\mu &= \sup\{I_E(s) : 0 \le s \le cf\} &&= \sup\left\{I_E(s) : 0 \le \frac{1}{c} s \le f\right\} \\ &= \sup\left\{cI_E\Big(\frac{1}{c} s\Big) : 0 \le \frac{1}{c} s \le f\right\} &&= c \sup\left\{I_E(t) : 0 \le t \le f\right\} \\ & &&= c \int_E f d\mu.\end{aligned}$$

Die übrigen Fälle behandelt man analog.
(e) Für *alle* Stufenfunktionen s ist $I_E(s) = 0$. Also ist $\int_E f_\pm d\mu = 0$ und $\int_E f d\mu = 0$.
(f) Für alle Stufenfunktionen $0 \le s \le f_+$ ist $I_A(s) \le I_E(s)$ und daher

$$\int_A f_+ d\mu = \sup\{I_A(s) : 0 \le s \le f_+\} \le \sup\{I_E(s) : 0 \le s \le f_+\} = \int_E f_+ d\mu < \infty.$$

Für f_- argumentiert man analog. ∎

Satz 2.6 (a) *Sei $f \ge 0$ messbar auf X. Für $A \in \mathfrak{S}$ definieren wir*

$$\varphi(A) := \int_A f d\mu. \tag{2.3}$$

Dann ist φ ein Maß auf $(X, \mathfrak{S})$.
(b) *Ist $f \in \mathfrak{L}^1(\mu)$, so wird durch* (2.3) *eine σ–additive Funktion definiert.*

Beweis Aussage (b) folgt sofort, wenn wir (a) auf die Funktionen $f_\pm$ anwenden und $f = f_+ - f_-$ benutzen.
Wir zeigen (a). Da $\varphi(\emptyset) = 0$ nach Lemma 2.5 (e) und $\varphi(A) \ge 0$ nach Lemma 2.5 (c) ist, müssen wir noch die σ–Additivität zeigen. Sei also $A = \cup_{n\ge1} A_n$ mit paarweise disjunkten messbaren Mengen A_n. Wir haben zu zeigen, dass $\varphi(A) = \sum_{n\ge1} \varphi(A_n)$.
Ist $f = \chi_C$ die charakteristische Funktion einer messbaren Menge C, so ist $\int_A f d\mu = \mu(A \cap C)$, und die Behauptung folgt aus der σ–Additivität von μ. Ist $f = \sum_{j=1}^k c_i \chi_{C_i}$ eine nichtnegative Stufenfunktion mit paarweise disjunkten Mengen $C_i \in \mathfrak{S}$, so ist

$$\int_A f d\mu = \sum_{j=1}^k c_j \mu(A \cap C_j),$$

und die Behauptung folgt aus der σ–Additivität der einzelnen Summanden. Sei nun $f \geq 0$ messbar. Aus dem bereits Bewiesenen folgt für jede Stufenfunktion s mit $0 \leq s \leq f$, dass

$$\int_A s\,d\mu = \sum_{n\geq 1} \int_{A_n} s\,d\mu \leq \sum_{n\geq 1} \int_{A_n} f\,d\mu = \sum_{n\geq 1} \varphi(A_n).$$

Bilden wir links das Supremum über alle Stufenfunktionen s mit $0 \leq s \leq f$, so folgt

$$\varphi(A) = \int_A f d\mu \leq \sum_{n\geq 1} \varphi(A_n).$$

Wir haben noch $\sum_{n\geq 1} \varphi(A_n) \leq \varphi(A)$ zu zeigen. Für $\varphi(A) = \infty$ ist dies klar. Sei also $\varphi(A) < \infty$ und damit auch $\varphi(A_n) < \infty$ für alle n. Mit der Definition des Integrals finden wir für jedes $\varepsilon > 0$ eine Stufenfunktion s mit $0 \leq s \leq f$ und

$$\int_{A_1} s\,d\mu \geq \int_{A_1} f\,d\mu - \varepsilon \quad \text{sowie} \quad \int_{A_2} s\,d\mu \geq \int_{A_2} f\,d\mu - \varepsilon.$$

Folglich ist

$$\varphi(A_1 \cup A_2) \geq \int_{A_1 \cup A_2} s\,d\mu = \int_{A_1} s\,d\mu + \int_{A_2} s\,d\mu \geq \varphi(A_1) + \varphi(A_2) - 2\varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $\varphi(A_1 \cup A_2) \geq \varphi(A_1) + \varphi(A_2)$. Induktiv erhalten wir

$$\varphi\Big(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\Big) \geq \sum_{j=1}^{n} \varphi(A_j) \text{ für alle } n \geq 1,$$

und wegen $\cup_{j=1}^{n} A_j \subseteq A$ führt dies auf

$$\varphi(A) \geq \lim_{n\to\infty} \varphi\Big(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\Big) \geq \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \varphi(A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi(A_j).$$

Damit ist alles gezeigt. ∎

Folgerung 2.7 *Sind $A \subseteq B$ messbare Mengen mit $\mu(B \setminus A) = 0$ und ist f Lebesgue–integrierbar, so ist*

$$\int_A f d\mu = \int_B f d\mu.$$

Beweis Die Funktion $\varphi(E) := \int_E f\,d\mu$ ist additiv nach Satz 2.6. Folglich ist $\varphi(B) = \varphi(A) + \varphi(B \setminus A)$, und nach Lemma 2.5 (e) ist $\varphi(B \setminus A) = 0$. ∎

Folgerung 2.8 *Sei $(X, \mathfrak{S}, \mu)$ vollständig, die Funktionen $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ seien fast überall gleich, und sei $f \in \mathfrak{L}^1(\mu, E)$ für $E \in \mathfrak{S}$. Dann ist auch $g \in \mathfrak{L}^1(\mu, E)$ und*

$$\int_E f\,d\mu = \int_E g\,d\mu.$$

Beweis Die Funktion g ist messbar nach Lemma 1.24. Sei N eine μ–Nullmenge so, dass $f(x) = g(x)$ für alle $x \in X \setminus N$. Dann ist auch $f_\pm(x) = g_\pm(x)$ für alle $x \in X \setminus N$, und wir erhalten

$$\begin{aligned}
\int_E f_\pm d\mu &= \int_{E\setminus N} f_\pm\,d\mu && \text{nach Folgerung 2.7}\\
&= \int_{E\setminus N} g_\pm\,d\mu && \text{nach Voraussetzung}\\
&= \int_{E\setminus N} g_\pm\,d\mu + \int_N g_\pm\,d\mu && \text{nach Lemma 2.5 } (e)\\
&= \int_E g_\pm\,d\mu.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung. ■

Satz 2.9 *Mit $f \in \mathfrak{L}^1(\mu, E)$ ist auch $|f| \in \mathfrak{L}^1(\mu, E)$, und es gilt*

$$\Big|\int_E f d\mu\Big| \le \int_E |f| d\mu.$$

Beweis Sei $A = \{x \in E : f(x) \ge 0\}$ und $B = E \setminus A$. Nach Satz 2.6 (a) ist

$$\int_E |f|\,d\mu = \int_A |f| d\mu + \int_B |f| d\mu = \int_A f_+ d\mu + \int_B f_- d\mu < \infty$$

und somit $|f| \in \mathfrak{L}^1(\mu, E)$. Wegen $f \le |f|$ und $-f \le |f|$ ist nach Lemma 2.5 (b), (d)

$$\int_E f d\mu \le \int_E |f| d\mu \quad \text{und} \quad -\int_E f d\mu \le \int_E |f| d\mu.$$

Hieraus folgt die Behauptung. ■

Satz 2.10 (a) *Ist f messbar, $|f| \le g$ und $g \in \mathfrak{L}^1(\mu, E)$, so ist auch $f \in \mathfrak{L}^1(\mu, E)$.*
(b) *Ist $(X, \mathfrak{S}, \mu)$ vollständig, f messbar, $|f| \le g$ fast überall und $g \in \mathfrak{L}^1(\mu, E)$, so ist $f \in \mathfrak{L}^1(\mu, E)$.*

Beweis (a) Dies folgt sofort aus $f_+ \le g$ und $f_- \le g$.
(b) Sei N eine μ–Nullmenge so, dass $|f(x)| \le g(x)$ für alle $x \in X \setminus N$, und sei

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls} \quad x \in X \setminus N \\ g(x) & \text{falls} \quad x \in N. \end{cases}$$

Nach Lemma 1.24 ist $\tilde{f}$ messbar, und es gilt $|\tilde{f}| \le g$. Nach Teil (a) ist $\tilde{f} \in \mathfrak{L}^1(\mu, E)$, und mit Folgerung 2.8 finden wir $f \in \mathfrak{L}^1(\mu, E)$. ■

2.3 Konvergenzsätze

Wir behandeln in diesem Abschnitt die Lebesgue'schen Konvergenzsätze. Diese Sätze sind unentbehrliche Werkzeuge der Analysis.

Satz 2.11 (Satz über monotone Konvergenz) *Sei $(X, \mathfrak{S}, \mu)$ vollständig, $E \in \mathfrak{S}$, und $(f_n)_{n\geq 1}$ sei eine Folge messbarer Funktionen mit*

$$0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \ldots \leq \infty \quad \textit{für fast alle } x \in X. \tag{2.4}$$

Dann konvergiert (f_n) fast überall punktweise gegen eine messbare Funktion f, und $\int_E f_n d\mu \to \int_E f d\mu$.

Ohne die Voraussetzung der Vollständigkeit gilt die Aussage immer noch, wenn man (2.4) für *alle* $x \in X$ fordert.

Beweis Sei N eine μ–Nullmenge so, dass (2.4) für alle $x \in X \setminus N$ erfüllt ist. Für alle $x \in X \setminus N$ konvergiert dann die Folge $(f_n(x))$ gegen $\tilde{f}(x) \in [0, \infty]$, und wir setzen

$$f(x) := \begin{cases} \tilde{f}(x) & \text{für} \quad x \in X \setminus N \\ \infty & \text{für} \quad x \in N. \end{cases}$$

Nach Lemma 1.25 ist f messbar. Sei $\alpha_n := \int_E f_n d\mu$. Nach Lemma 2.5 (b) und Folgerung 2.7 ist die Folge (α_n) monoton wachsend. Sei

$$\alpha := \sup\{\alpha_n : n \geq 1\} = \lim_{n\to\infty} \alpha_n \in [0, \infty].$$

Für jede Stufenfunktion s mit $s \leq f_n$ gilt auch $s \leq f$ und somit $\int_E f_n d\mu \leq \int_E f d\mu$. Folglich ist $\alpha \leq \int_E f d\mu$.

Wir zeigen noch die umgekehrte Ungleichung $\alpha \geq \int_E f d\mu$. Dazu nehmen wir $\alpha < \infty$ an (sonst ist nichts zu beweisen). Sei s eine Stufenfunktion mit $0 \leq s \leq f$, $c \in (0, 1)$ und $E_n := \{x \in E \setminus N : f_n(x) \geq cs(x)\}$ für $n \geq 1$. Dann ist $E_n \subseteq E_{n+1}$ für alle n (Monotonie der Folge (f_n) außerhalb von N) und $\cup_{n\geq 1} E_n = E \setminus N$ (wegen $f_n(x) \to f(x)$ und $cs(x) < f(x)$ für alle $x \in X \setminus N$ mit $f(x) > 0$).

Mit Satz 2.6 (a) und Lemma 2.5 (b) erhalten wir außerdem, dass

$$\int_E f_n d\mu \geq \int_{E_n} f_n d\mu \geq c \int_{E_n} s d\mu. \tag{2.5}$$

Für $n \to \infty$ ergibt sich daher wieder mit Satz 2.6 (a), (2.5) und Lemma 1.17 (c)

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu \geq c \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} s d\mu = c \int_{E\setminus N} s d\mu = c \int_E s d\mu.$$

Da $c \in (0,1)$ beliebig war, folgt $\alpha \geq \int_E s d\mu$ für alle Stufenfunktionen s mit $0 \leq s \leq f$. Dann ist aber $\alpha \geq \int_E f d\mu$. ■

Der folgende Satz zeigt zusammen mit Lemma 2.5 (d), dass die reellwertigen Funktionen aus $\mathfrak{L}^1(\mu, E)$ einen reellen Vektorraum bilden.

Satz 2.12 *Ist $f_1, f_2 \in \mathfrak{L}^1(\mu, E)$ und ist $f_1 + f_2$ erklärt, so ist auch $f_1 + f_2 \in \mathfrak{L}^1(\mu, E)$ und es gilt*

$$\int_E (f_1 + f_2) d\mu = \int_E f_1 d\mu + \int_E f_2 d\mu. \tag{2.6}$$

Beweis Zuerst zeigen wir (2.6) für nichtnegative Stufenfunktionen. Ist $s = \sum_j c_j \chi_{E_j}$ eine nichtnegative Stufenfunktion (mit *nicht notwendig* paarweise disjunkten Mengen E_i), so kann man s schreiben als $\sum_k d_k \chi_{F_k}$ mit paarweise disjunkten Mengen F_k und mit $d_k := \sum_{j : F_k \subseteq E_j} c_j$. Damit folgt

$$\begin{aligned}
\int_E s d\mu &= \sum_k d_k \mu(F_k \cap E) = \sum_k \sum_{j : F_k \subseteq E_j} c_j \mu(F_k \cap E) \\
&= \sum_j c_j \sum_{k : F_k \subseteq E_j} \mu(F_k \cap E) = \sum_j c_j \mu(E_j \cap E) = \sum_j c_j \int_E \chi_{E_j} d\mu.
\end{aligned}$$

Da man zwei Stufenfunktionen s_1, s_2 immer als $s_1 = \sum_j c_j \chi_{E_j}$ und $s_2 = \sum_j d_j \chi_{E_j}$ (mit *gleichen* Mengen E_j) schreiben kann, folgt hieraus (2.6) für nichtnegative Stufenfunktionen.

Seien nun $f_1, f_2 \in \mathfrak{L}^1(\mu, E)$ nichtnegativ. Nach Satz 2.2 gibt es monoton wachsende Folgen (s_n) bzw. (t_n) von Stufenfunktionen, die punktweise gegen f_1 bzw. f_2 konvergieren. Dann ist $(s_n + t_n)$ eine monoton wachsende Folge von Stufenfunktionen, die punktweise gegen $f_1 + f_2$ konvergiert. Der Satz von der monotonen Konvergenz liefert

$$\int_E s_n d\mu \to \int_E f_1 d\mu, \quad \int_E t_n d\mu \to \int_E f_2 d\mu, \quad \int_E (s_n + t_n) d\mu \to \int_E (f_1 + f_2) d\mu.$$

Aus $\int_E s_n d\mu + \int_E t_n d\mu = \int_E (s_n + t_n) d\mu$ folgt (2.6) auch in diesem Fall. Im allgemeinen Fall zerlegt man E in vier paarweise disjunkte messbare Mengen, auf denen f_1 und f_2 ihr Vorzeichen nicht wechseln, und benutzt (2.6) für nichtnegative Funktionen sowie die Beziehung $\int_E (-f) d\mu = -\int_E f d\mu$ aus Lemma 2.5 (d). ■

Wir haben hier nur die schwächere Form von Satz 2.11 benutzt. Satz 2.12 gilt also ohne Vollständigkeitsvoraussetzung. Für Reihen liefert Satz 2.11:

Folgerung 2.13 *Sei $(X, \mathfrak{S}, \mu)$ vollständig, $f_n : X \to [0, \infty]$ und $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ fast überall. Damit ist f messbar, und für $E \in \mathfrak{S}$ ist*

$$\int_E f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n \, d\mu.$$

Beweis Sei $g_n := \sum_{j=1}^n f_n$. Die Folge (g_n) ist monoton wachsend und konvergiert fast überall gegen f. Nach Lemma 1.25 ist f messbar, und die Sätze 2.11 und 2.12 liefern

$$\begin{aligned}\int_E f d\mu &\overset{2.11}{=} \lim_{n\to\infty}\int_E g_n d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_E \sum_{j=1}^n f_j d\mu \\ &\overset{2.12}{=} \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^n \int_E f_j d\mu = \sum_{j=1}^\infty \int_E f_j d\mu.\end{aligned}$$ ■

Unser nächstes Ziel ist der Satz von der majorisierten Konvergenz, das vermutlich wichtigste Werkzeug, um die Vertauschbarkeit von Grenzübergang und Integration zu zeigen. Vorbereitend überlegen wir uns ein Lemma.

Lemma 2.14 (Fatou) *Sind $f_n : X \to [0,\infty]$ messbare Funktionen und ist $E \in \mathfrak{S}$, so ist*

$$\int_E \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \le \liminf_{n\to\infty}\int_E f_n d\mu.$$

Beweis Für $k \ge 1$ sei $g_k := \inf_{j\ge k} f_j$. Dann ist $g_k \le f_k$ und somit $\int_E g_k d\mu \le \int_E f_k d\mu$. Weiter ist die Folge (g_k) monoton wachsend, und sie konvergiert punktweise gegen $\liminf_{n\to\infty} f_n$. Der Satz über montone Konvergenz (schwache Fassung) liefert

$$\int_E f_k d\mu \ge \int_E g_k d\mu \to \int_E \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu$$

und damit

$$\liminf_{k\to\infty}\int_E f_k d\mu \ge \int_E \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu.$$ ■

Satz 2.15 (Lebesgues Satz über majorisierte Konvergenz) *Sei $(X, \mathfrak{S}, \mu)$ ein vollständiger Maßraum, $E \in \mathfrak{S}$, und (f_n) sei eine Folge messbarer Funktionen $f_n : X \to \mathbb{R}$, die fast überall gegen eine Funktion f konvergieren. Weiter sei $g : X \to \mathbb{R}$ eine messbare Funktion mit $|f_n| \le g$ für alle n fast überall. Ist $g \in \mathfrak{L}^1(\mu, E)$, so gehören auch f und f_n zu $\mathfrak{L}^1(\mu, E)$, und es gilt*

$$\int_E f_n d\mu \to \int_E f d\mu.$$

Beweis Sei N eine μ–Nullmenge so, dass $f_n(x) \to f(x)$ für $n \to \infty$ und $|f_n(x)| \le g(x)$ für alle n und alle $x \in X \setminus N$. Dann ist f messbar nach Lemma 1.25, und es ist $|f(x)| \le g(x)$ für alle $x \in X \setminus N$. Nach Satz 2.10 (b) sind $f, f_n \in \mathfrak{L}^1(\mu, E)$. Weiter ist $|f - f_n| \le 2g$ auf $X \setminus N$. Wir wenden das Fatousche Lemma auf die

Folge der Funktionen $(2g - |f - f_n|)\big|_{X\setminus N}$ an und erhalten

$$\begin{aligned}\int_E 2g d\mu &= \int_{E\setminus N} 2g d\mu = \int_{E\setminus N} \liminf_{n\to\infty} (2g - |f_n - f|) d\mu \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \int_{E\setminus N} (2g - |f_n - f|) d\mu \\ &= \int_{E\setminus N} 2g d\mu + \liminf_{n\to\infty} \int_{E\setminus N} -|f_n - f| d\mu \\ &= \int_E 2g d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_E |f_n - f| d\mu \leq \int_E 2g d\mu.\end{aligned}$$

Da $\int_E 2g d\mu = 2\int_E g d\mu < \infty$ ist, erhalten wir $\lim_{n\to\infty} \int_E |f_n - f| d\mu = 0$. Dies hat

$$\Big|\int_E f_n d\mu - \int_E f d\mu\Big| \leq \int_E |f_n - f| d\mu \to 0$$

zur Folge (Satz 2.12 und Satz 2.9). ■

Ohne Vollständigkeitsvoraussetzung gilt der Satz 2.15 noch, wenn alle "fast" in seiner Formulierung gestrichen werden.

Beispiel Wir betrachten eine Funktionenfolge, auf die sich der Satz von der majorisierten Konvergenz *nicht* anwenden lässt („der gleitende Buckel"). Dazu sei $(X, \mathfrak{S}, \mu) = (\mathbb{R}, \tilde{\mathfrak{B}}(\mathbb{R}), \lambda)$ und $f_n = \chi_{[n,n+1]}$ für $n \in \mathbb{N}$. Die Funktionen f_n konvergieren punktweise gegen $f \equiv 0$, aber

$$0 = \int_{\mathbb{R}} f d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n d\lambda \neq \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda = 1. \qquad ■$$

2.4 Lebesgue– und Riemann–Integral

Wir vergleichen in diesem Abschnitt das Riemann–Integral über Intervallen in $\mathbb{R}$ mit dem Lebesgue–Integral. Die Resultate hängen davon ab, ob die Intervalle beschränkt oder unbeschränkt sind. *Wir vereinbaren*: wenn wir über Lebesgue–Integration auf $\mathbb{R}^n$ sprechen, legen wir stets den *vervollständigten* Maßraum $(\mathbb{R}^n, \tilde{\mathfrak{B}}(\mathbb{R}^n), \lambda)$ zu Grunde, betrachten also messbare Funktionen

$$f : \Big(\mathbb{R}^n, \tilde{\mathfrak{B}}(\mathbb{R}^n), \lambda\Big) \to \Big(\overline{\mathbb{R}}, \mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}})\Big).$$

Satz 2.16 *Ist $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, so ist jede auf $[a,b]$ Riemann–integrierbare Funktion f auch Lebesgue–integrierbar, und*

$$\int_{[a,b]} f d\lambda = \int_a^b f(x) dx.$$

Beweis Ist f auf $[a,b]$ Riemann–integrierbar, so gibt es für jedes $n \geq 1$ Treppenfunktionen $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$ mit $\int_a^b (\psi_n(x) - \varphi_n(x))dx < \frac{1}{n}$ (Ana II, Folgerung 8.9). O.E.d.A. können wir die Folgen (φ_n) bzw. (ψ_n) als monoton wachsend bzw. fallend voraussetzen (andernfalls ersetzen wir φ_n durch $\max(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ und ψ_n durch $\min(\psi_1, \ldots, \psi_n)$). Nach den Integraldefinitionen stimmen Riemann– und Lebesgue–Integral für Treppenfunktionen überein. Es ist also auch

$$\int_{[a,b]} (\psi_n - \varphi_n)d\lambda < 1/n. \tag{2.7}$$

Die monotonen Funktionenfolgen (φ_n) bzw. (ψ_n) konvergieren punktweise auf $[a,b]$ gegen messbare Funktionen φ bzw ψ mit $\varphi \leq f \leq \psi$. Aus $\varphi_1 \leq \varphi_n \leq \psi_n \leq \psi_1$ und der Lebesgue–Integrierbarkeit von φ_1 und ψ_1 folgt mit dem Satz über die majorisierte Konvergenz, dass $\varphi, \psi \in \mathfrak{L}^1(\lambda, [a,b])$ und dass

$$\int_{[a,b]} \varphi_n d\lambda \to \int_{[a,b]} \varphi d\lambda \quad \text{sowie} \quad \int_{[a,b]} \psi_n d\lambda \to \int_{[a,b]} \psi d\lambda.$$

Der gleiche Satz liefert mit (2.7), dass $\int_{[a,b]}(\psi - \varphi)d\lambda = 0$. Aus der Übung wissen wir, dass dann $\varphi = \psi$ fast überall, und wegen $\varphi \leq f \leq \psi$ ist auch $\varphi = f$ fast überall. Folglich ist auch $f \in \mathfrak{L}^1(\lambda, [a,b])$, und

$$\int_{[a,b]} f d\lambda = \int_{[a,b]} \varphi d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} \varphi_n d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx. \qquad \blacksquare$$

In diesem Zusammenhang erinnern wir an das *Lebesguesche Integrabilitätskriterium* (Ana II, Abschnitt 8.4).

Satz 2.17 *Eine beschränkte Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann Riemann–integrierbar, wenn ihre Unstetigkeitsstellen eine λ–Nullmenge bilden.*

Die Klasse der Lebensgue–integrierbaren Funktionen ist aber wesentlich größer als die der Riemann–integrierbaren Funktionen. Ein einfaches Beispiel ist die charakteristische Funktion $\chi_{\mathbb{Q}}$ der Menge der rationalen Zahlen, die nicht Riemann– aber Lebesgue–integrierbar ist (beachte: Mengen, die nur aus einem Punkt bestehen, sind Borelmengen vom Maß 0, und $\mathbb{Q}$ ist eine abzählbare Vereinigung solcher Mengen). Es folgt ein Beispiel einer Lebesgue–integrierbaren Funktion, die sich (im Gegensatz zu $\chi_{\mathbb{Q}}$) nicht einmal durch Abändern auf einer Nullmenge zu einer Riemann–integrierbaren Funktion machen lässt.

Beispiel Sei $Q = \mathbb{Q} \cap (0,1)$. Diese Menge ist abzählbar: $Q = \{q_n : n \geq 1\}$. Sei $\varepsilon > 0$ und $U_n \subseteq (0,1)$ ein offenes Intervall einer Länge $\leq \varepsilon/2^n$, das q_n enthält. Dann ist

$$Q \subseteq U := \bigcup_{n\geq 1} U_n \subseteq (0,1) \quad \text{und} \quad \lambda(U) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(U_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.$$

Sei $f = \chi_U$ und $f_n := \chi_{U_1 \cup \ldots \cup U_n}$. Die Funktionen f_n sind Riemann–integrierbar,

$$\int_{[0,1]} f_n d\lambda = \int_0^1 f_n(x) dx \le \varepsilon,$$

und die Folge (f_n) ist monoton wachsend und konvergiert punktweise gegen f. Nach dem Satz über monotone Konvergenz ist f Lebesgue–integrierbar und

$$\int_{[0,1]} f d\lambda \le \varepsilon.$$

Zeigen Sie als Übung, dass f die behauptete Eigenschaft hat. ■

Bei uneigentlichen Riemann–Integralen, die nicht absolut konvergieren, ist die Situation subtiler. Da die Lebesgue–Integrabilität die absolute Konvergenz des Integrals voraussetzt, können uneigentliche Riemann–Integrale existieren, die man nicht als Lebesgue–Integrale interpretieren kann. Bevor wir ein Beispiel geben, fassen wir diesen Zusammenhang präziser. Dazu benötigen wir folgenden Satz.

Satz 2.18 (Ausschöpfungssatz) *Sei (M_n) eine wachsende Folge messbarer Teilmengen von $X, M := \cup_{n \ge 1} M_n$ und $f : M \to \mathbb{R}$. Dann ist f genau dann in $\mathfrak{L}^1(\mu, M)$, wenn $f \in \mathfrak{L}^1(\mu, M_n)$ für jedes n und wenn die Folge der $\int_{M_n} |f| d\mu$ konvergiert (gegen eine* endliche *Zahl). Ist dies der Fall, so ist*

$$\int_M f d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_{M_n} f d\mu.$$

Beweis Aus $f \in \mathfrak{L}^1(\mu, M)$ folgt $|f| \in \mathfrak{L}^1(\mu, M)$ (Satz 2.9) und damit $|f| \in \mathfrak{L}^1(\mu, M_n)$, und es gilt $\int_{M_n} |f| d\mu \le \int_M |f| d\mu$.

Der interessante Teil des Beweises betrifft die Umkehrung dieser Aussage. Zunächst konvergiert die monoton wachsende Folge $(\chi_{M_n}|f|)$ punktweise gegen $\chi_M |f|$, so dass

$$\int_X \chi_{M_n} |f| \, d\mu \to \int_X \chi_M |f| \, d\mu \quad \text{bzw.} \quad \int_{M_n} |f| \, d\mu \to \int_M |f| \, d\mu$$

nach dem Satz über monotone Konvergenz. Nach Voraussetzung ist $\int_M |f| \, d\mu$ also endlich, d. h. $\chi_M |f| \in \mathfrak{L}^1(\mu, M)$. Weiter ist $|\chi_{M_n} f| \le \chi_M |f|$, und die Funktionen $\chi_{M_n} f$ konvergieren punktweise wegen $\chi_M f$, so dass wir mit dem Satz über majorisierte Konvergenz $f \in \mathfrak{L}^1(\mu, M)$ sowie

$$\lim_{n \to \infty} \int_{M_n} f \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_X \chi_{M_n} f d\mu = \int_X \chi_M f d\mu = \int_M f d\mu$$

erhalten. ■

Folgerung 2.19 *Seien $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ und $a < b$. Ist $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ Riemann–integrierbar auf jedem kompakten Teilintervall von (a, b), so ist f genau dann Lebesgue–integrierbar auf (a, b), wenn das uneigentliche Riemann–Integral $\int_a^b |f(x)|dx$ konvergiert.*

Beweis Wir wählen eine monoton fallende Folge (x_n) mit $a < x_n < b$ und $x_n \to a$ und eine monoton wachsende Folge (y_n) mit $x_n < y_n < b$ und $y_n \to b$, und wir setzen $M_n := [x_n, y_n]$. Dann ist $M = \cup_{n \geq 1} M_n = (a, b)$, und nach dem Ausschöpfungssatz ist f genau dann Lebesgue–integrierbar auf M, wenn der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \int_{M_n} |f| d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{x_n}^{y_n} |f(x)|dx$$

endlich ist. ■

Beispiel Auf $[1, \infty)$ sei $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Wir wissen aus Ana II, Abschnitt 8.10.1, dass das uneigentliche Riemann–Integral $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ konvergiert. Dieses Integral konvergiert aber nicht absolut, denn für $x \in [k\pi, (k+1)\pi]$ ist $|f(x)| \geq \frac{|\sin x|}{(k+1)\pi}$ und folglich

$$\begin{aligned} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |f(x)|dx &\geq \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{k\pi+\pi} |\sin x|dx \\ &= \frac{1}{(k+1)\pi} \int_0^\pi \sin x dx = \frac{2}{(k+1)\pi}. \end{aligned}$$

Wegen der Divergenz der harmonischen Reihe konvergiert $\int_1^\infty |f(x)|dx$ nicht, und nach Folgerung 2.19 ist f *nicht* Lebesgue–integrierbar auf $[1, \infty)$. ■

Ergänzend gehen wir noch kurz auf zwei Resultate ein. Das erste betrifft parameterabhängige Integrale, wo wir nun wesentlich stärkere Aussagen als früher zeigen können.

Satz 2.20 *Sei $(X, \mathfrak{S}, \mu)$ ein Maßraum und $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Weiter sei $f : X \times U \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass für jedes $u \in U$ die Funktion*

$$\hat{f}_u : X \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x, u)$$

zu $\mathfrak{L}^1(\mu, X)$ gehört, und sei

$$g : U \to \mathbb{R}, \quad u \mapsto \int_X \hat{f}_u d\mu = \int_X f(x, u) d\mu(x).$$

(a) Sind alle Funktionen $f_x : U \to \mathbb{R}$, $u \mapsto f(x, u)$ stetig in $p \in U$ und existiert eine Funktion $h \in \mathfrak{L}^1(\mu, X)$ mit $|f(x, u)| \leq h(x)$ für alle $(x, u) \in X \times U$, so ist g in p stetig.

(b) Sei $1 \le j \le n$. Haben alle Funktionen f_x eine stetige partielle Ableitung $D_j f_x = \frac{\partial f_x}{\partial u_j}$ und gibt es eine Funktion $h \in \mathfrak{L}^1(\mu, X)$ mit

$$|D_j f_x(u)| \le h(x) \quad \textit{für alle} \quad (x, u) \in X \times U,$$

so existiert auch $D_j g$, diese Funktion ist stetig, und für alle $p \in U$ ist

$$(D_j g)(p) = \int_X D_j f(x, p) d\mu(x).$$

Beweis Aussage (a) folgt direkt aus dem Satz über majorisierte Konvergenz, da man Stetigkeit durch konvergente Folgen testen kann. Zu (b): Mit dem Mittelwertsatz finden wir für jedes $t \in \mathbb{R}$ mit $u + \mu t e_j \in U$ für alle $\mu \in [0, 1]$ ein $\theta \in [0, 1]$ so, dass

$$\frac{1}{t} |f(x, u + te_j) - f(x, u)| = |(D_j f)(x, u + \theta t e_j)| \le h(x).$$

Mit dem Satz über majorisierte Konvergenz erhalten wir für jede Folge (t_n) mit $t_n \to 0$ die Beziehung

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{g(p + t_n e_j) - g(p)}{t_n} &= \lim_{n\to\infty} \int_X \frac{f(x, p + t_n e_j) - f(x, p)}{t_n} d\mu \\ &= \int_X D_j f(x, p) d\mu. \end{aligned}$$

■

Die zweite Ergänzung betrifft Funktionenräume, die man mit dem Lebensgue–Integral sehr bequem definieren kann. Für einen vollständigen Maßraum $(X, \mathfrak{S}, \mu)$ und $p \in [1, \infty)$ sei $\mathfrak{L}^p(\mu, X)$ die Menge aller messbaren Funktionen f mit $|f|^p \in \mathfrak{L}^1(\mu, X)$. Man kann zeigen, dass $\mathfrak{L}^p(\mu, X)$ ein linearer Raum ist und dass die Abbildung

$$\mathfrak{L}^p(\mu, X) \to [0, \infty), \quad f \mapsto \|f\|_p := \Big(\int_X |f|^p d\mu \Big)^{1/p}$$

alle Eigenschaften einer Norm mit Ausnahme von $\|f\|_p = 0 \Rightarrow f = 0$ hat. Um diese Eigenschaft zu erzwingen, setzt man $\mathcal{N}_p := \{f \in \mathfrak{L}^p(\mu, X) : \|f\|_p = 0\}$ und faktorisiert $\mathcal{N}_p$ weg. Auf den Räumen $L^p(\mu, X) := \mathfrak{L}^p(\mu, X)/\mathcal{N}_p$ wird durch $\| \cdot \|_p$ eine Norm induziert, die man wieder mit $\| \cdot \|_p$ bezeichnet. Die dominierende Rolle dieser Räume in der Analysis liegt an folgendem Satz:

Satz 2.21 *Die Räume $(L^p(\mu, X), \| \cdot \|_p)$ sind vollständig, also Banachräume.*

Literatur: Forster, Analysis 3, §10. ■