# 12. Übung zur Analysis IV, Lösungsvorschlag

## Aufgaben

**A 1** (3 Punkte)

Berechne das 2-dimensionale Volumen der folgenden Flächen in $\mathbb{R}^3$.

1. $z = xy$ mit $x^2 + y^2 \leq 1$;
2. $z = 2x + 3y + 4$ mit $0 \leq y \leq x^2 \leq 1$;
3. $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ mit $x^2 + y^2 \leq x$;
4. $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\ a \leq x \leq b,\ z \geq 0\}$, wobei $-R \leq a < b \leq R$ ist.

*1. Sei $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2 + y^2 < 1\}$. Dann ist $\phi : A \to \mathbb{R}^3$ mit $\phi(x, y) = (x, y, xy)$ eine Parametrisierung von $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ z = xy,\ (x, y) \in A\}$. Ausserdem haben wir $\det(J(\phi)^T \cdot J(\phi)) = 1 + x^2 + y^2$. Damit ergibt sich $S_M(M) = \int_A \sqrt{1 + x^2 + y^2} dxdy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + r^2} r dt dr = 2\pi \int_0^1 \sqrt{1 + r^2} r dr = \frac{2\pi}{3}(2\sqrt{2} - 1)$.*

*2. Die Lösung ist analog zu A1(1). Sei $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ 1 > x^2 > y > 0\}$. Dann ist $\phi : A \to \mathbb{R}^3$ mit $\phi(x, y) = (x, y, 2x + 3y + 4)$ eine Parametrisierung von $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ z = 2x + 3y + 4,\ (x, y) \in A\}$. Ausserdem ist $\det(J(\phi)^T \cdot J(\phi)) = 14$. Damit erhalten wir $S_M(M) = \int_A \sqrt{14} dxdy = \sqrt{14} \int_{-1}^1 \int_0^{x^2} dydx = \frac{2}{3}\sqrt{14}$.*

*3. Sei $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < x\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 < \frac{1}{4}\}$. Dann ist $\phi : A \to \mathbb{R}^3$ mit $\phi(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$ eine Parametrisierung von $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ z = \sqrt{1 - x^2 - y^2},\ (x, y) \in A\}$. Ausserdem haben wir $\det(J(\phi)^T \cdot J(\phi)) = \frac{1}{1 - x^2 - y^2}$. Damit ergibt sich $S_M(M) = \int_A \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} dxdy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos t} \frac{r}{\sqrt{1 - r^2}} dr dt = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - r^2}|_0^{\cos t} dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - |\sin t|) dt = \pi - 2$.*

*4. Sei $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2 + y^2 < R^2,\ a < x < b\}$. Die Funktion $\phi : A \to \mathbb{R}^3$ mit $\phi(x, y) = (x, y, \sqrt{R^2 - x^2 - y^2})$ ist eine Parametrisierung von $M' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\ a < x < b,\ z > 0\}$. Das 2-dimensionale Mass von $M \subset M'$ gleich Null. Wir haben $\det(J(\phi)^T \cdot J(\phi)) = \frac{R^2}{R^2 - x^2 - y^2}$. Damit ergibt sich*

$$S_M(M) = \int_A \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dxdy = R \int_a^b \int_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2}} \frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dydx =$$

$$R \int_a^b \arcsin \frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2}} \Big|_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2}} dy = R\pi(b - a).$$

**A 2** (2 Punkte)

Sei $a > 0$. Berechne die folgenden Flächenintegrale.

1. $\int_M y^2 z dS_M$ mit $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$;
2. $\int_M z^4 dS_M$ mit $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ z \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq z^2\}$.

*Die Abbildung $\phi : (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}^3$ mit $\phi(t, s) = (a \cos t \cos s, a \sin t \sin s, a \sin s)$ ist eine Parametrisierung von $\phi((0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}))$. Ausserdem ist das 2-dimensionale Mass von $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2\} \setminus \phi((0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}))$ gleich Null. Wir haben auch $\det(J(\phi)^T \cdot J(\phi)) = a^4 \cos^2 s$. Damit ergibt sich:*

*1. $\int_M y^2 z dS_M = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (a^2 \sin^2 t \cos^2 s) \cdot a \sin s \cdot a^2 \cos s ds dt = a^5 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 s \sin s ds \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt = 0$.*

*2. $\int_M z^4 dS_M = \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} a^4 \sin^4 s \cdot a^2 \cos s ds dt = 2\pi a^6 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 s \cos s ds = 2\pi a^6 (\frac{1}{5} - \frac{1}{20\sqrt{2}})$.*

**A 3** (2 Punkte)

Sei $0 < r < R < \infty$. Bestimme das 2-dimensionale Volumen des Torus

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ (R - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2 = r^2\}.$$

*In Übung 11 wurde es schon bewiesen, dass $M$ eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist. Sei $A = \{(u,v) \in (0,2\pi) \times (0,2\pi)\}$. Dann ist $\phi : A \to \mathbb{R}^3$ mit $\phi(u,v) = ((r + R\cos v)\cos u, (r + R\cos v)\sin u, r\sin v)$ eine Parametrisierung von $M' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y,z) = ((r+R\cos v)\cos u, (r+R\cos v)\sin u, r\sin v),\ (u,v) \in A\}$. Das 2-dimensionale Mass von $M \setminus M'$ ist gleich Null. Wir haben $\det(J(\phi)^T \cdot J(\phi)) = r^2(R + r\cos v)^2$. Damit ergibt sich $S_M(M) = \int_A r(R + r\cos v)dudv = 4\pi^2 rR + 2\pi r \int_0^{2\pi} \cos v dv = 4\pi^2 rR$.*

**A 4** (4 Punkte)

Entscheide, ob es möglich ist, einen Kreis vom Durchmesser 100 mit 99 Streifen der Breite 1 zu überdecken. (Die Streifen sind unendlich lang.)

Hinweis: Benutze die Aufgabe A1(4).

*Seien $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq (50)^2\}$ der gegebene Kreis und $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 50^2\}$. Sei $S$ ein Streifen der Breite 1, der $K$ schneidet. (Es ist sinnvoll, die ganze Breite des Streifens zu benutzen). Wir bezeichnen mit $\alpha(s)$ der Teil von $M$, der direkt über $S$ liegt. Nach der Aufgabe A1(4) ist $S_M(\alpha(s)) = 50\pi$, also hängt $S_M(\alpha(s))$ nicht von $s$ ab. Wenn nur solche Überdeckung möglich wäre, hätten wir*

$$2\pi \cdot 50^2 = S_M(\bigcup_{i=1}^{99} \alpha(s_i)) \leq \sum_{i=1}^{99} S_M(\alpha(s_i)) \leq 99 \cdot 50\pi,$$

*woraus die unsinnige Ungleichung $100 \leq 99$ folgt. Widerspruch.*

**A 5** (6 Punkte)

Ist $(X, S, \mu)$ ein Massraum und $\phi : X \to Y$ eine Abbildung, so definieren wir eine Abbildung $\phi[\mu] : \phi[S] \to [0,\infty]$ durch

$$\phi[\mu](A) := \mu(\phi^{-1}(A)) \ A \in \phi[S],$$

wobei $\phi[S] := \{A \subset Y : \phi^{-1}(A) \in S\}$ das direkte Bild von $S$ unter $\phi$ ist.

1. Zeige, dass $\phi[\mu]$ ein Mass auf $(Y, \phi[S])$ ist.
2. Zeige, dass eine Funktion $f : Y \to Z$ in einem messbaren Raum $(Z, \mathfrak{T})$ genau dann auf $(Y, \phi[S])$ messbar ist, wenn $f \circ \phi : X \to Z$ auf $(X, S)$ messbar ist.
3. Zeige, dass
$$\int_Y f d\phi[\mu] = \int_X f \circ \phi d\mu$$
für jede auf $(Y, \phi[S])$ messbare Funktion $f : Y \to [0,\infty]$, unter Benutzung des in Übung 10, A3 beschriebenen Beweisprinzips.
4. Zeige, dass eine Funktion $f : Y \to \mathbb{R}$ genau dann bezüglich $\phi[\mu]$ integrierbar ist, wenn $f \circ \phi : X \to \mathbb{R}$ bzgl. $\mu$ integrierbar ist.

1. *Es ist $\phi[\mu](\emptyset) = \mu(\phi^{-1}(\emptyset)) = \mu(\emptyset) = 0$. Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweiser disjunkter Mengen in $\phi[S]$, so ist $(\phi^{-1}(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen in $S$ und folglich*
$$\phi[\mu](\bigcup_{n\in\mathbb{N}}) = \mu(\phi^{-1}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n)) = \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \phi^{-1}(A_n)) = \sum_{n=0} \mu(\phi^{-1}(A_n)) = \sum_{n=0} \phi[\mu](A_n).$$
*Somit ist $\phi[\mu]$ ein Mass.*
2. *Für $A \in \mathfrak{T}$ gilt $(f \circ \phi)^{-1}(A) = \phi^{-1}(f^{-1}(A))$, also*
$$(f \circ \phi)^{-1}(A) \in S \Leftrightarrow \phi^{-1}(f^{-1}(A)) \in S \Leftrightarrow f^{-1}(A) \in \phi[S].$$
*Folglich ist $f$ genau dann auf $(Y, \phi[S])$ messbar, wenn $f \circ \phi$ auf $(X, S)$ messbar ist.*

3. *Ist* $A \in \phi[S]$, *so gilt* $\phi^{-1}(A) \in S$ *und* $\chi_A^Y \circ \phi = \chi_{\phi^{-1}(A)}^X$ *(wobei das hochgestellte* $X$ *bzw.* $Y$ *andeutet, dass wir eine charakteristische Funktion auf* $X$ *bzw. auf* $Y$ *betrachten). Also*

$$\int_X \chi_A^Y \circ \phi d\mu = \int_X \chi_{\phi^{-1}(A)}^X d\mu = \mu(\phi^{-1}(A)) = \phi[\mu](A) = \int_Y \chi_A^Y d\phi[\mu].$$

*Ist nun* $s = \sum_{j=1}^k \alpha_j \chi_{A_j}^Y$ *eine nicht-negative Stufenfunktion auf* $Y$, *mit* $\alpha_j \geq 0$ *und* $A_j \in \phi[S]$, *so folgt mit dem Vorigen:*

$$\int_X s \circ \phi d\mu = \sum_{j=1}^k \alpha_j \int_X \chi_{A_j}^Y \circ \phi d\mu = \sum_{j=1}^k \alpha_j \int_X \chi_{A_j}^Y \circ d\phi[\mu] = \int_Y s d\phi[\mu].$$

*Ist schliesslich* $f : Y \to [0, \infty]$ *eine beliebige messbare Funktion auf* $(Y, \phi[S])$, *so wählen wir eine monoton wachsende Folge* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *nicht-negative Stufenfunktionen* $s_n$ *auf* $Y$, *die punktweise gegen* $f$ *konvergiert. Dann ist* $(s_n \circ \phi)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine monoton wachsende Folge von Stufenfunktionen auf* $X$, *die punktweise gegen* $f \circ \phi$ *konvergiert. Also liefern die bereits bewiesene Transformationsformel und Satz von Lebesgue über die monotone Konvergenz:*

$$\int_Y f d\phi[\mu] = \lim_{n\to\infty} \int_Y s_n d\phi[\mu] = \lim_{n\to\infty} \int_X s_n \circ \phi d\mu = \int_X f \circ \phi d\mu.$$

4. *Es ist* $f$ *bzgl.* $\phi[\mu]$ *integrierbar genau dann, wenn* $f_+$ *und* $f_-$ *bzgl.* $\phi[\mu]$ *integrierbar sind. Nach Teil (2) und (3) ist das genau dann der Fall, wenn* $f_+ \circ \phi$ *und* $f_- \circ \phi$ *bzgl.* $\mu$ *integrierbar sind. Wegen* $f_\pm \circ \phi = (f \circ \phi)_\pm$ *gilt letzteres aber genau dann, wenn* $f \circ \phi$ *bzgl.* $\mu$ *integrierbar ist.*