11. Übung zur Analysis IV, Lösungsvorschlag

Aufgaben

A 1 (3 Punkte)

Entscheide, ob die folgende Abbildung $\varphi : U \to \mathbb{R}^3$ eine Immersion und eine Einbettung ist. Entscheide, ob $\varphi(U)$ eine Untermannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^3$ ist.

1. $U = \mathbb{R}^2$ und $\varphi(x,y) = (2x+3y, x-y, xy)$;
2. $U = (0,1) \times (0,\pi)$ und $\varphi(x,y) = (x\cos y, x\sin y, x+y)$;
3. $U = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $\varphi(t) = (2t^2+3, \sin^2 t, \cos^2 t)$.

1. Die Abbildung $\varphi(x,y)$ ist eine Immersion, da $\varphi'(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ y & x \end{pmatrix}$ und $\operatorname{rang} \varphi'(x,y) = 2$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Da die Abbildung $\phi : (x,y) \to (2x+3y, x-y)$ injektiv ist, ist φ auch injektiv. Die Abbildung $\phi^{-1} : (t,s) \to \frac{1}{5}(t+3s, t-2s)$ ist stetig. Da die Abbildung $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit $p(t,s,u) = (t,s)$ stetig ist, ist $\varphi^{-1} = \phi^{-1} \circ p$ auch stetig. Da φ eine Immersion und eine Einbettung ist, ist $\varphi(U)$ eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$.

2. Die Abbildung $\varphi(x,y)$ ist eine Immersion, da $\varphi'(x,y) = \begin{pmatrix} \cos y & -x\sin y \\ \sin y & x\cos y \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} \cos y & -x\sin y \\ \sin y & x\cos y \end{vmatrix} = x \neq 0$, was bedeutet, dass $\operatorname{rang} \varphi'(x,y) = 2$ für alle $(x,y) \in (0,1) \times (0,\pi)$ ist. Da die Abbildung $\phi : (x,y) \to (x\cos y, x\sin y)$ injektiv ist, ist φ auch injektiv. Die Abbildung ϕ^{-1} ist differenzierbar (und damit auch stetig) auf $\phi((0,1)\times(0,\pi))$, da $\det \phi'(x,y) = x \neq 0$ für $(x,y) \in (0,1)\times(0,\pi)$ ist. Da die Abbildung $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit $p(t,s,u) = (t,s)$ stetig ist, ist $\varphi^{-1} = \phi^{-1} \circ p$ auch stetig. Da φ eine Immersion und eine Einbettung ist, ist $\varphi(U)$ eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$.

3. Da $\varphi'(t) = (4t, \sin 2t, -\sin 2t)$ ist, ist $\operatorname{rang} \varphi'(t) = 1$ für $t \neq 0$. Die Abbildung φ ist keine Einbettung, da $\varphi(-\pi) = \varphi(\pi)$ ist. Trotzdem ist die Menge $M = \varphi(U)$ eine Untermannigfaltigkeit, da $\varphi|_{(0,\infty)} : (0,\infty) \to \mathbb{R}^3$ eine Immersion und eine Einbettung ist und $\varphi(U) = \varphi((0,\infty))$.

A 2 (3 Punkte)

Entscheide, ob die Menge M eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ ist. Falls ja, gebe ihre Dimension sowie einen Umgebungsatlas (aller Karten, durch die die Menge M dargestellt wird) an.

1. $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ 3e^x + xy + z = 1\}$,
2. $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ 2y - x + xyz = 0\}$,
3. $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ \cos^2 x + x^2 y - z = 2$ und $\ln(1+x^2) + y + z = 3\}$.

1. Die Teilmenge $M \subset R^3$ lässt sich durch eine Karte beschreiben: $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (x,y) \to (x, y, 1 - 3e^x - xy)$. Nach Beispiel 2, Kap.4 ist diese Abbildung eine Immersion, und es ist offensichtlich eine Einbettung. Die Dimension von M ist 2.

2. Aus $2y - x + xyz = 0$ bekommen wir, dass $x = \frac{2y}{1-yz}$ für $yz \neq 1$, $y = \frac{x}{2+xz}$ für $xz \neq -2$ und $z = \frac{x-2y}{xy}$ für $xy \neq 0$. Für jeden Punkt $(x,y,z) \in M$ mit $xy \neq 0$ können wir als Karte die Abbildung $(x,y) \to (x, y, \frac{x-2y}{xy})$ wählen. Für jedes $(0,y,z) \in M$ gibt es eine Umgebung $V \subset \mathbb{R}^n$, so dass $xz \neq -2$ für $(x,y,z) \in V$, und als Karte wählen wir die Abbildung $(x,z) \to (x, \frac{x}{2+xz}, z)$. Ganz analog kann die Abbildung $(y,z) \to (\frac{2y}{1-yz}, y, z)$ für $(x,0,z) \in M$ als Karte gewählt werden.

3. Aus den gegebenen Gleichungen erhalten wir, dass $y = \frac{5-\cos^2 x - \ln(1+x^2)}{1+x^2}$, $z = 3 - \ln(1+x^2) - \frac{5-\cos^2 x - \ln(1+x^2)}{1+x^2}$. Die Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^3 : x \to (x, \frac{5-\cos^2 x - \ln(1+x^2)}{1+x^2}, 3 - \ln(1+x^2) - \frac{5-\cos^2 x - \ln(1+x^2)}{1+x^2})$ ist eine Karte, da sie stetig differenzierbar mit $\operatorname{rang} \varphi'(x) = 1$ (also eine Immersion) und eine Einbettung ist. Die Dimension von M ist 1.

A 3 (3 Punkte)

1. Sei $z, r \in C^1(I)$ mit $r > 0$, wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Interval ist. Sei entweder $r'(t) \neq 0$ oder $z'(t) \neq 0$. Zeige, dass die Menge
$$M = \{(x, y, z(t)) \in \mathbb{R}^3 |\ x^2 + y^2 = r(t)^2,\ t \in I\}$$
eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.

2. Zeige, dass die Mengen $M_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x^2 + y^2 - 2z = 1,\ 4 < z < 9\}$ und $M_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ a^2(x^2 + y^2) = r^2(a + z)^2,\ 0 < z < a,\ r, a > 0\}$ 2-dimensionale Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^3$ sind.

1. *Wenn die Abbildungen* $\Phi_1 : I \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3 : (t, \varphi) \to \begin{pmatrix} r(t)\cos\varphi \\ r(t)\sin\varphi \\ z(t) \end{pmatrix}$ *und* $\Phi_2 : I \times (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^3 : (t, \varphi) \to \begin{pmatrix} r(t)\cos\varphi \\ r(t)\sin\varphi \\ z(t) \end{pmatrix}$ *Immersionen und Einbettungen sind, dann stellen sie einen Atlas für die Menge M dar, und M ist eine Mannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$. Wir zeigen, dass die Abbildung Φ_1 eine Karte ist. Für die Abbildung Φ_2 geht es analog. In Beispiel 4, Kap. 4 wurde schon bewiesen, dass diese Abbildung eine Immersion ist. Sie ist auch injektiv, da $r(t) > 0$ ist. Jetzt zeigen wir, dass die Umkehrabbildung Φ_1^{-1}stetig ist.*
Wenn $r'(t) \neq 0$ ist, dann betrachten wir (wie in Aufgabe A1(2)) die Funktion $\Phi(t, \varphi) = \begin{pmatrix} r(t)\cos\varphi \\ r(t)\sin\varphi \end{pmatrix}$. $\det \Phi'(t, \varphi) = r'(t)r(t) \neq 0$ *für alle $(t, \varphi) \in I \times (0, 2\pi)$. Daraus folgt, dass die Abbildung Φ^{-1} differenzierbar ist. Da die Abbildung $P(t, s, u) = (t, s)$ stetig ist, ist die Abbildung $\Phi_1^{-1} = \Phi^{-1} \circ P$ auch stetig.*
Wenn $z'(t) \neq 0$ ist, dann können wir $\Phi_1(t, \varphi)$ als Hintereinanderstellung von Funktionen Φ und P darstellen:
$$\Phi_1 : (t, \varphi) \xrightarrow{\Phi} \begin{pmatrix} t \\ \sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} \xrightarrow{P} \begin{pmatrix} r(t)\cos\varphi \\ r(t)\sin\varphi \\ z(t) \end{pmatrix}.$$
Die Funktion Φ ist injektiv, stetig und Φ^{-1} ist auch stetig auf $\Phi(I \times (0, 2\pi)) = I \times S_1 \setminus \{(1, 0)^T\}$ (S_1 ist die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^2$). Die Funktion $P : I \times S_1 \setminus \{(1, 0)^T\} \to \Phi_1(I \times (0, 2\pi)) : \begin{pmatrix} t \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} r(t)x_1 \\ r(t)x_2 \\ z(t) \end{pmatrix}$ *ist injektiv und stetig. Die Umkehrabbildung ist* $P^{-1} : \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} z^{-1}(y_3) \\ \frac{y_1}{r(z^{-1}(y_3))} \\ \frac{y_2}{r(z^{-1}(y_3))} \end{pmatrix}$ *ist auch stetig, da die Funktion $z(t)$ wegen $z'(t) \neq 0$ für alle $t \in I$ eine differenzierbare Umkehrfunktion hat, und $r(t) > 0$ für alle $t \in I$. Daraus folgt, dass $\Phi^{-1} = P^{-1} \circ \Phi^{-1}$ stetig ist.*

2. *Wir verwenden A3(1). Die Menge M_1 beschreibt ein Paraboloid. Wir nehmen $z(t) = t$ und $r(t) = \sqrt{1 + 2t}$, wobei $t \in (4, 9)$ ist. Da $z, r \in C^1(4, 9)$ und $z'(t) = 1 \neq 0$ für alle $t \in (4, 9)$ ist, ist nach A3(1) M_1 eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$. Die Menge M_2 ist ein Kegel. Für die Menge M_2 nehmen wir $z(t) = t$ und $r(t) = \frac{r^2(a+t)^2}{a^2}$, wobei $t \in (0, a)$ ist. Da $z, r \in C^1(0, a)$ und $z'(t) = 1 \neq 0$ für alle $t \in (0, a)$ ist, ist M_2 nach A3(1) eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$.*

A 4 (2 Punkte)

Seien $0 < r < R < \infty$. Zeige, dass der Torus
$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ (R - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2 = r^2\}$$

eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.

Hinweis: Betrachte die Parametrisierung $\psi(u,v) = \begin{pmatrix} (R + r\cos v)\cos u \\ (R + r\cos v)\sin u \\ r\sin v \end{pmatrix}$ mit $(u,v) \in (0,2\pi) \times (0,2\pi)$.

Sei $\psi_1(u,v) = \psi(u,v)$ mit $(u,v) \in (0,2\pi) \times (0,2\pi)$, $\psi_2(u,v) = \psi(u,v)$ mit $(u,v) \in (-\pi,\pi) \times (0,2\pi)$, $\psi_3(u,v) = \psi(u,v)$ mit $(u,v) \in (0,2\pi) \times (-\pi,\pi)$ und $\psi_4(u,v) = \psi(u,v)$ mit $(u,v) \in (-\pi,\pi) \times (-\pi,\pi)$. Zu zeigen ist, dass ψ_i, $i = 1,...,4$ Karten der Menge M sind. Durch diese 4 Karten wird die Menge M bedeckt. Wir zeigen, dass die Abbildung ψ_1 eine Karte ist. Für ψ_i, $i = 2,3,4$ kann man das analog beweisen. Die Abbildung ψ_1 ist stetig differezierbar. Da $\cos u$ und $\sin u$ nicht gleichzeitig gleich Null sein können (dasselbe gilt auch für $\cos v$ und $\sin v$), ist der Rang von der Matrix $\psi_1'(u,v)$ gleich $\operatorname{rang}\begin{pmatrix} -(R + r\cos v)\sin u & r\cos u \sin v \\ (R + r\cos v)\cos u & -r\sin u\sin v \\ 0 & r\cos v \end{pmatrix} = 2$. *Daher ist ψ_1 eine Immersion. Die Abbildung ψ_1 ist stetig und injektiv. Es bleibt zu zeigen, dass die Umkehrabbildung ψ_1^{-1} auf $\psi((0,2\pi) \times (0,2\pi))$ stetig ist. Das machen wir analog zu der Aufgabe A3(1). Wir stellen ψ_1 als Hintereinanderstellung von Funktionen Φ und P mit*

$$\psi_1 : (u,v) \xrightarrow{\Phi} \begin{pmatrix} \sin u \\ \cos u \\ \sin v \\ \cos v \end{pmatrix} \xrightarrow{P} \begin{pmatrix} (R + r\cos v)\cos u \\ (R + r\cos v)\sin u \\ r\sin v \end{pmatrix}.$$

Die Funktion Φ ist stetig, injektiv und Φ^{-1} ist auch stetig auf $S_1 \setminus \{(0,1)^T\} \times S_1 \setminus \{(0,1)^T\}$. Die Funktion $P : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} (R + rx_4)x_2 \\ (R + rx_4)x_1 \\ rx_3 \end{pmatrix}$ *ist injektiv und stetig und die Umkehrabbildung $P^{-1} : \psi_1((0,2\pi) \times (0,2\pi)) \to S_1 \setminus \{(0,1)^T\} \times S_1 \setminus \{(0,1)^T\}$ ist auch stetig.*

A 5 (4 Punkte)

Wieviele Karten braucht man mindestens für einen Atlas der Erde? Gebe diese Karten an.

Eine Sphäre S_2 mit Radius R in $\mathbb{R}^3$ kann durch die folgenden 2 Karten bedeckt werden: $\psi_1 : (x,y) \to (x, y, \sqrt{R^2 - x^2 - y^2})$, für alle (x,y) aus $\mathbb{R}^2$ mit $x^2 + y^2 < R$ und $\psi_2 : \mathbb{R}^2 \to S_2 \setminus \{(0,0,1)\} : (x,y) \to (-\frac{2y_1}{y_1^2+y_2^2+1}, -\frac{2y_2}{y_1^2+y_2^2+1}, \frac{y_1^2+y_2^2-1}{y_1^2+y_2^2+1})$ mit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Sie ist daher eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$. Die Funktion ψ_2 ist die Umkehrabbildung von der sogenannten stereographischen Projektion. Diese Projektion bildet eineindeutig die Punkte einer Sphäre ohne Nordpol auf $\mathbb{R}^2$. Man verbindet den Nordpol und den Punkt (x_1, x_2, x_3) der Sphäre mit einer Gerade, und der Punkt $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, in dem diese Gerade $\mathbb{R}^2$ schneidet, ist die stereographischen Projektion des Punktes (x_1, x_2, x_3) auf $\mathbb{R}^2$.

Nehmen wir an, es ist möglich eine einzige Karte ϕ zu finden, so dass es eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^2$ gibt, mit $\phi(U) = S_2$. Wir beweisen, dass die Menge S_2 ein Kompakt ist. Sie ist beschränkt. Sei $x_n \in S_2$ eine konvergente Folge mit dem Grenzwert x. Aus $|1 - \|x\|| \leq \|x_n - x\| \to 0$ folgt, dass $x \in S_2$ ist. Also ist S_2 abgeschlossen, woraus folgt, dass S_2 ein Kompakt ist. Da ϕ^{-1} eine stetige Abbildung ist, und stetige Abbildungen bilden kompakte Mengen auf kompakte Mengen, muss U ein Kompakt sein. Daraus folgt, dass $U = \emptyset$ ist. Daher kann nicht die Menge S_2 mit Hilfe nur einer Karte bedeckt werden, man braucht mindestens zwei, die schon angegeben wurden.