10. Übung zur Analysis IV, Lösungsvorschlag

Aufgaben

A 1 (Fourier Transformation)(9 Punkte)
Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ sei wieder $\hat{f} = \mathcal{F}f$ die Fourier Transformierte von f.

Im folgenden seien stets $\phi, \psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und es existiere ein $R > 0$ mit $\phi(x) = \psi(x) = 0$ für $|x| > R$. Außerdem schreiben wir $\phi^-(x) = \phi(-x)$.

Beweise die folgenden Eigenschaften

1. $\hat{\phi} \in L^1(\mathbb{R}^n)$.
2. (Ein Eigenvektor) Für $\eta(x) = e^{-\frac{|x|^2}{2}}$ gilt $\hat{\eta}(\xi) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\xi|^2}{2}}$.
3. (Umkehrformel) $\mathcal{F}^2\phi = (2\pi)^n \phi^-$.
4. (Parseval'sche Formel)
$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{\phi}\overline{\hat{\psi}}\, d\lambda = (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} \phi\overline{\psi}\, d\lambda.$$
5. $\|\hat{\phi}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$, wobei $\|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \left(\int |\phi|^2\, d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}$.

Hinweise: Zu 1.: Verwende Übung 9 A 5.3.

Zu 2.: Verwende den Satz von Fubini, quadratische Ergänzung und den Cauchy'schen Integralsatz

Zu 3.: Es gilt $e^{i\langle x-y,\xi\rangle}\phi(y) \notin L^1(\mathbb{R}^{2n})$. Das heißt, man kann den Satz von Fubini nicht ohne weiteres anwenden. Um dieses Problem zu umgehen, füge den Extrafaktor $\eta(\varepsilon\xi)$ mit $\eta(x) = e^{-\frac{|x|^2}{2}}$ ein. Betrachte den Grenzübergang $\varepsilon \to 0$.

4. und 5. folgen dann relativ einfach aus 3.

1. *Wir betrachten den Differentialoperator* $L = \left(1 - \sum_{j=1}^n \partial_{jj}\right)^n$. *Dann gilt nach Übung 9 A 5.3.*
$$\mathcal{F}(L\phi) = (1 + |\xi|^2)^n \hat{\phi}.$$
Da $L\phi$ *in* $L^1(\mathbb{R}^n)$ *liegt, ist* $\mathcal{F}(L\phi)$ *beschränkt. Also gilt* $|\hat{\phi}(\xi)| \le c(1+|\xi|^2)^{-n} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *Nach Übung 8 A 6.*
2. *Nach Definition und dem Satz von Fubini gilt*
$$\hat{\eta}(\xi) = \int e^{-i\langle x,\xi\rangle} e^{-\frac{|x|^2}{2}}\, dx = \left(\int e^{-ix_1\xi_1} e^{-\frac{x_1^2}{2}}\, dx_1\right) \cdots \left(\int e^{-ix_n\xi_n} e^{-\frac{x_n^2}{2}}\, dx_n\right).$$
Somit genügt es, das Ganze für $n = 1$ *zu beweisen. Für* $n = 1$ *und* $\xi \in \mathbb{R}$ *gilt aber mit quardatischer Ergänzung*
$$\hat{\eta}(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x+i\xi)^2} dx.$$
Wir möchen nun $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x+i\xi)^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$ *beweisen. Dazu betrachten wir den Weg* γ, *der das Rechteck* $[-A, A] \times [0, \xi]$ *gegen den Uhrzeigersinn umläuft. Da die Funktion* $e^{-\frac{1}{2}z^2}$ *holomorph ist, ist das Integral über diesen Weg 0. Also gilt wegen* $\left|e^{-\frac{1}{2}(A+i\xi)^2}\right| = e^{\frac{1}{2}(\xi^2 - A^2)}$
$$\left|\int_{-A}^{A} e^{-\frac{1}{2}(x+i\xi)^2} dx - \int_{-A}^{A} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx\right| \le 2|\xi| e^{\frac{1}{2}(\xi^2 - A^2)} \xrightarrow{A\to\infty} 0.$$
Also gilt wegen (3.11) und Substitution
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x+i\xi)^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \sqrt{2\pi}.$$
Setzt man jetzt alles zusammen, so erhält man die Behauptung.

3. *Mit Fubini und der Substitution $y = x + \varepsilon z$, $\xi = \frac{\zeta}{\varepsilon}$ erhält man*

$$\begin{aligned}\int \eta(\varepsilon\xi)\hat{\phi}(\xi)e^{-\langle -x,\xi\rangle}d\xi &= \int\int \psi(\varepsilon\xi)\phi(y)e^{\langle x-y,\xi\rangle}dy\,d\xi \\ &= \int\int \psi(\zeta)\phi(x+\varepsilon z)e^{-i\langle z,\zeta\rangle}dz\,d\zeta \\ &= \int \hat{\psi}(z)\phi(x+\varepsilon z)dz\end{aligned}$$

Nach dem Satz von der dominierten Konvergenz kann auf beiden Seiten der Gleichung der Grenzwert für $\varepsilon \to 0$ in das Integral hineingezogen werden. (Majorante rechte Seite $\hat{\phi}$, Majorante linke Seite $\hat{\eta}$) Wir erhalten also mit 2.

$$\mathcal{F}^2\phi(-x) = \eta(0)\int \hat{\phi}(\xi)e^{-\langle -x,\xi\rangle}d\xi = \phi(x)\int \hat{\psi}(z)dz = \phi(x)\mathcal{F}^2\psi(0) = (2\pi)^n\phi(x).$$

4. *Aus 3. und Übung 9 A 5.2. folgt nun*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{\phi}(\xi)\overline{\hat{\psi}(\xi)}\,d\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^2\phi(-x)\overline{\psi(x)}\,d\lambda = (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\overline{\psi}(x)\,d\lambda$$

5. *Aus 4. folgt nun*

$$\|\hat{\phi}\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\phi}(\xi)\overline{\hat{\phi}(\xi)}\,d\lambda = (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} |\phi|^2\,d\lambda = (2\pi)^n\|\phi\|_{L^2}^2.$$

A 2 (Das Dirac-Maß) (5 Punkte)

(a) Es sei X eine Menge, $x \in X$ und $\delta_x\colon \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ die durch

$$\delta_x(A) \;:=\; \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A; \\ 0 & \text{falls } x \notin A \end{cases}$$

definierte Funktion. Prüfe nach, dass δ_x ein Maß auf $(X, \mathcal{P}(X))$ ist.

(b) Gegeben sei eine Menge X und $x \in X$. Zeige, dass

$$\int_X f\,d\delta_x \;=\; f(x)$$

für jede Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$.

(c) Was bedeutet fast überall Konvergenz bezüglich des Maßes δ_x?

(a) Da $x \notin \emptyset$, ist $\delta_x(\emptyset) = 0$. Um die σ-Additivät von δ_x nachzuprüfen, seien $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{P}(X)$ paarweise disjunkte Mengen und $A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Falls $x \in A_m$ für ein $m \in \mathbb{N}$, so gilt $x \in A$ und $x \notin A_n$ für $n \neq m$, somit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \delta_x(A_n) \;=\; \delta_x(A_m) \;=\; 1 \;= \delta_x(A)\,.$$

Ist hingegen $x \notin A_n$ für alle n, so ist $x \notin A$ und $\delta_x(A) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty}\delta_x(A_n)$.

(b) Zunächst sei f nicht-negativ. Für jedes $r \in [0,\infty[$ mit $r \leq f(x)$ ist dann $t := r\chi_{\{x\}}$ eine nicht-negative Stufenfunktion mit $t \leq f$, somit

$$\int_X f\,d\delta_x \;\geq\; \int_X r\chi_{\{x\}}\,d\delta_x \;=\; r\delta_x(\{x\}) \;=\; r\,.$$

Bildung des Supremums über alle r liefert $\int_X f\,d\delta_x \geq f(x)$. Ist andererseits $s\colon X \to [0,\infty[$ irgendeine nicht-negative Stufenfunktion mit $s \leq f$, so schreiben wir $s = \sum_{j=1}^{n}\alpha_j\chi_{A_j}$ mit $\alpha_j \in [0,\infty[$ und paarweise disjunkten Mengen $A_j \in \mathcal{P}(X)$, wobei o.B.d.A. $x \in A_1$. Dann ist

$$\int_X s\,d\delta_x \;:=\; \sum_{j=1}^{n}\alpha_j\delta_x(A_j) \;=\; \alpha_1 \;=\; s(x) \;\leq f(x)\,,$$

somit $\int_X f\,d\delta_x := \sup\left\{ \int_X s\,d\delta_x : s \text{ Stufenfkt. mit } 0 \leq s \leq f\right\} \leq f(x)$. *Also ist* $\int_X f\,d\delta_x = f(x)$.

Für beliebiges f *folgt* $\int_X f\,d\delta_x = \int_X f_+\,d\delta_x - \int_X f_-\,d\delta_x = f_+(x) - f_-(x) = f(x)$.

(c) $f_n \to f$ *fast überall, falls* $f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$ *für das eine anfangs gegebene* x.

A 3 **(Maße mit Dichten)** (4 Punkte)
Es sei $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum und $f \geq 0$ eine messbare Funktion auf $(\Omega, \mathcal{S})$. Dann ist nach Satz 2.6 durch $\nu(A) := (f\mu)(A) := \int_A f\, d\mu$ ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{S})$ definiert.

Dieses Maß nennen wir das Maß mit Dichte f bezüglich μ

Beweise: Eine messbare Funktion g auf $(\Omega, \mathcal{S})$ ist genau dann bezüglich ν integrierbar, wenn $g \cdot f$ bezüglich μ integrierbar ist. In diesem Fall gilt

$$\int g\, d\nu = \int g \cdot f\, d\mu.$$

Hinweis: Beginne mit charakteristischen Funktionen, dann zeige das Ergebnis für Stufenfunktionen und als nächstes für nicht negative Funktionen.

1. Schritt: Man erhält für $A \in \mathcal{S}$

$$\int \chi_A d\nu = \nu(A) = \int_A f\, d\mu = \int \chi_A \cdot f\, d\mu.$$

Wegen der Linearität des Integrals folgt nun die Behauptung für Stufenfunktionen.
2. Schritt: Sei nun $g \geq 0$. Wir wählen nun eine monoton wachsende Folge von Stufenfunktionen (u_n) mit $u_n \to g$. Dann ist auch $(u_n \cdot f)$ monoton wachsend und diese Folge konvergiert gegen $g \cdot f$. Nach dem Satz von der monotonen Konvergenz gilt also

$$\int g\, d\nu = \lim_{n\to\infty} \int u_n\, d\nu = \lim_{n\to\infty} \int u_n \cdot f\, d\mu = \int g \cdot f\, d\mu.$$

3. Schritt: Es gilt

$$\int |g|\, d\nu = \int |g| \cdot f\, d\mu = \int |g \cdot f|\, d\mu,$$

also ist g genau dann bezüglich ν integrierbar, wenn $f \cdot g$ bezüglich μ integrierbar ist. In diesem Fall gilt

$$\int g\, d\nu = \int g_+\, d\nu + \int g_-\, d\nu = \int g_+ \cdot f\, d\mu + \int g_- \cdot f\, d\mu = \int g \cdot f\, d\mu.$$

A 4 **(Ein Flächeninhalt)** (3 Punkte)
Berechne den beschränkten Teil der Ebene, der durch die implizit gegebene Kurve

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2xy = 0, \qquad (a > 0 \ \text{ fest})$$

umschlossen wird.

Wir verwenden ebene Polarkoordinaten:

$$T(r, \phi) = (r\cos\phi, r\sin\phi) = (x, y), \quad r \geq 0, \quad \phi \in (0, 2\pi].$$

Also

$$0 = (x^2 + y^2)^2 - 2a^2xy = r^4 - a^2r^2 2\sin\phi\cos\phi = r^4 - a^2r^2\sin(2\phi). \tag{1}$$

Da $T(\{0\} \times (0, 2\pi])$ eine Nullmenge ist, können wir $r > 0$ annehmen. Somit ist die Gleichung (1) genau dann erfüllt, wenn $r^2 = a^2\sin(2\phi)$

Es folgt $\sin 2\phi > 0$, das bedeutet $\phi \in (0, \frac{\pi}{2}) \cup (\pi, \frac{3}{2}\pi)$. Somit können wir aus Symmetriegründen den oben beschriebenen Flächeninhalt A berechnen durch

$$A = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a\sqrt{\sin 2\phi}} r\, dr\, d\phi = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(a^2\sin(2\phi))d\phi = a^2(-\frac{1}{2}\cos\pi + \frac{1}{2}\cos 0) = a^2$$

Montag, 25.06.2007 – 16:15-17:15 Uhr – S214/024

PD Dr. Steffen Roch

FG Analysis

„Integralgleichungen und numerische Analysis“

Nach dem Vortrag gibt es ein gemütliches Treffen in S215/219, um über den Vortrag zu reden und den Vortragenden näher kennenzulernen.