7. Übung zur Analysis IV, Lösungsvorschlag

Aufgaben

A 1 **(Fast überall punktweise Konvergenz)** (4 Punkte)
Sei $(M, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum und $(f_n)_n$ eine Cauchyfolge in $L^1(\mu)$. Das heißt, jedes $f_n : M \to \mathbb{R}$ sei messbar und es gelte

$$\|f_m - f_n\|_{1,\mu} = \int_M |f_m - f_n| d\mu \xrightarrow{n,m\to\infty} 0.$$

Zeige, dass (f_n) eine Teilfolge hat, die fast überall punktweise gegen eine Grenzfunktion f konvergiert.
Folgere hieraus die Vollständigkeit von $L^1(\mu)$.
Hinweise: Konstruiere eine Teilfolge $(f_{n_j})_j$ mit

$$\|f_{n_j} - f_{n_{j+1}}\|_{1,\mu} < \frac{1}{2^j}.$$

Beweise, dass $g := |f_{n_1}| + \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \in L^1(\mu)$. Verwende $f := f_{n_1} + \sum_{k=1}^{\infty}(f_{n_{k+1}} - f_{n_k})$ als Kandidaten für die Grenzfunktion.

Anmerkung der Redaktion: Ganz analog beweist man auch die Vollständigkeit von $L^p(\mu)$ mit $1 < p < \infty$. Identifiziert man zwei Funktionen, die sich höchstens auf einer Nullmenge unterscheiden, so erhält man einen vollständigen normierten Vektorraum, einen sogenannten Banachraum.

Nach der Definition der Cauchyfolge gibt es für jedes $j \in \mathbb{N}$ ein N_j, so dass

$$\|f_m - f_n\|_{1,\mu} < \frac{1}{2^j} \quad \text{für} \quad n, m \geq N_j.$$

Die Folge der N_j kann o.B.d.A. monoton wachsend gewählt werden. Setzen wir $n_j = N_j$, so hat die Folge $(f_{n_j})_j$ die gewünschten Eigenschaften.
Nach dem Satz über die monotone Konvergenz gilt

$$\begin{aligned}\int_M g\, d\mu &= \int_M |f_{n_1}| d\mu + \sum_{k=1}^{\infty} \int_M |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| d\mu \\ &\leq \int_M |f_{n_1}| d\mu + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \\ &\leq \int_M |f_{n_1}| d\mu + 1 < \infty.\end{aligned}$$

Also kann $g(x)$ höchstens auf einer Nullmenge unendlich sein. Sei also N eine Nullmenge und $g(x) \neq \infty$ auf $M \setminus N$. Setzt man $f(x) = 0$ of N und $f(x) := f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty}(f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x))$, so konvergiert (f_{n_j}) fast überall punktweise gegen f und $2g$ ist eine Majorante für $|f_{n_j} - f|$.
Somit folgt

$$\|f_{n_j} - f\|_{1,\mu} = \int_M |f_{n_j} - f| d\mu \to 0$$

und wir haben eine Teilfolge gefunden, die in $L^1(\mu)$ gegen f konvergiert. Da aber (f_n) selber eine Cauchyfolge ist, folgt, dass in Wirklichkeit $f_n \to f$ in $L^1(\mu)$.

A 2 **(Faltung mit Mollifiern)** (4 Punkte)
Sei $0 \leq \phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine C^∞-Funktion mit $\int_R \phi\, d\lambda = 1$ und es gebe ein $R > 0$, so dass $\phi(x) = 0$, falls $|x| > R$. Für ein integrierbares f betrachten wir die Funktion

$$F_\phi(f)(x) := \int_{\mathbb{R}} \phi(x - t) f(t)\, \lambda(dt) = \phi * f(x).$$

$\phi * f$ heißt die Faltung von ϕ mit f.

1. Beweise, dass $F_\phi(f)$ differenzierbar ist.

2. Sei $\phi_\delta(t) := \frac{1}{\delta}\phi(\frac{t}{\delta})$. Sei außerdem f stetig. Beweise

$$F_{\phi_\delta}(f)(x) \xrightarrow{\delta\to 0} f(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

1. *Offenbar ist die Funktion $x \mapsto \phi(x-t)f(t)$ differenzierbar für alle t, und weil $\partial_x\phi$ stetig ist mit $\partial_x\phi(x) = 0$ für $|x| > R$, gibt es ein $C > 0$, so dass*

$$|\partial_x(\phi(x-t)f(t))| = |\partial_x\phi(x-t)f(t)| \le C|f(t)|,$$

was integrierbar ist. Somit ist nach Satz 2.20 die Funktion $F_{\phi_\delta}(f)$ differenzierbar.

2. *Weil alle beteiligten Funktionen stetig sind, kann man nach Satz 2.16 das Integral als Riemann Integral auffassen, wo die Substitutionsregel schon bewiesen ist. Also rechnen wir*

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\delta}\phi(\frac{x-t}{\delta})f(t)dt = \int_{\mathbb{R}} \phi(s)f(x-\delta s)ds.$$

Nun konvergiert wegen der Stetigkeit von f die Funktion $\phi(s)f(x-\delta s)$ für $\delta \to 0$ gegen $\phi(s)f(x)$ und, da die stetigen Funktionen $f(x-\cdot)$ und ϕ auf $[-R,R]$ beschränkt sind, haben wir die Majorante $\chi_{[-R,R]}C$. So erhalten wir mit dem Satz von Lebesgue

$$F_{\phi_\delta}(f)(x) \xrightarrow{\delta\to 0} \int_{\mathbb{R}} \phi(s)f(x)ds = f(x)\int_{\mathbb{R}} \phi(s)ds = f(x).$$

A 3 (Parametrisierung von Körpern im $\mathbb{R}^3$) (3 Punkte)

Finde je eine Parametrisierung für die folgenden Körper im $\mathbb{R}^3$.

1. Eine Kugel (in karthesischen Koordinaten)
2. Einen Kegelstumpf (in Zylinderkoordinaten)
3. Einen Würfel, mit einer würfelförmigen Aussparung in der Mitte (in welchen Koordinaten wohl?)

Es ist Dir natürlich freigestellt, welche Kugel, welchen Kegelstumpf und so weiter Du parametrisierst.

1. *$Ku = \{x\mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \le 243\}$.*
2. *$Ke = \{(r\sin\phi, r\cos\phi, z) \mid 1 \le z \le 2,\ 0 \le r \le z,\ 0 \le \phi < 2\pi\}$.*
3. *$W = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \le \max\{|x_1|, |x_2|, |x_3|\} \le 2\}$.*

A 4 **(Satz von Fubini)** (4 Punkte)

Berechne das Integral $\int_A f\, d\lambda_2$, wobei...

(a) A das Quadrat mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$ ist und

$$f(x,y) \;:=\; x^2 + y^3 + 2xy^2\,;$$

(b) A das Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(0,\pi)$, $(\pi,0)$ ist und

$$f(x,y) \;:=\; xy - 3\cos(x+y)\,.$$

(a) Mit dem Satz von Fubini können wir das zu berechnende Integral zu einem iterierten Integral umschreiben:

$$\begin{aligned}
\int_A f\, d\lambda_2 \;&=\; \int_{[0,1]\times[0,1]} (x^2+y^3+2xy^2)\, d\lambda_2(x,y) \\
&=\; \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} (x^2+y^3+2xy^2)\, d\lambda_1(x) \right) d\lambda_2(y) \\
&=\; \int_{[0,1]} \Big[x^3/3 + xy^3 + x^2y^2\Big]_{x=0}^{x=1} d\lambda_2(y) \;=\; \int_0^1 (1/3 + y^3 + y^2)\, dy \\
&=\; \Big[y/3 + y^4/4 + y^3/3\Big]_0^1 \;=\; 1/3 + 1/4 + 1/3 \;=\; 11/12\,.
\end{aligned}$$

(b) Mit dem Satz von Fubini erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\int_A \big(xy - 3\cos(x+y)\big)\, d\lambda_2(x,y) \\
&=\; \int_{[0,\pi]\times[0,\pi]} \chi_A(x,y)\cdot\big(xy - 3\cos(x+y)\big)\, d\lambda_2(x,y) \\
&=\; \int_{[0,\pi]} \left(\int_{[0,\pi-y]} \big(xy - 3\cos(x+y)\big)\, d\lambda_1(x) \right) d\lambda_1(y) \\
&=\; \int_{[0,\pi]} \big[x^2y/2 - 3\sin(x+y)\big]_{x=0}^{x=\pi-y}\, d\lambda_1(y) \;=\; \int_0^\pi \big((\pi-y)^2y/2 + 3\sin y\big)\, dy \\
&=\; \int_0^\pi \big(\pi^2y/2 - \pi y^2 + y^3/2 + 3\sin y\big)\, dy \;=\; \big[\pi^2y^2/4 - \pi y^3/3 + y^4/8 - 3\cos y\big]_0^\pi \\
&=\; \pi^4/4 - \pi^4/3 + \pi^4/8 + 6 \;=\; \pi^4/24 + 6\,.
\end{aligned}$$

A 5 **(Berechnung eines Volumens)** (3 Punkte)

Berechne das Volumen des von den Flächen

$$x+y=1\,,\quad x=0\,,\quad y=0\,,\quad z=6x^2+2y^2 \quad\text{und}\quad z=0$$

eingeschlossenen Körpers K.

Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^2$ das Dreieck mit den Ecken $(0,0)$, $(1,0)$ und $(0,1)$. Setzen wir ${}_{(x,y)}K := \{z \in \mathbb{R} : (x,y,z) \in K\}$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, so ist

$${}_{(x,y)}K \;=\; \begin{cases} [0, 6x^2+2y^2] & \text{falls } (x,y)\in A; \\ \emptyset & \text{falls } (x,y)\notin A\,. \end{cases}$$

Mit dem Prinzip von Cavalieri und dem Satz von Fubini erhalten wir also

$$\begin{aligned}
\lambda_3(K) &= \int_A \lambda_1\big({}_{(x,y)}K\big)\, d\lambda_2(x,y) \\
&= \int_A \lambda_1\big([0, 6x^2 + 2y^2]\big)\, d\lambda_2(x,y) \\
&= \int_A \big(6x^2 + 2y^2\big)\, d\lambda_2(x,y) \\
&= \int_{[0,1]} \int_{[0,1-y]} (6x^2 + 2y^2)\, d\lambda_1(x)\, d\lambda_1(y) \\
&= \int_{[0,1]} \big[2x^3 + 2xy^2\big]_{x=0}^{x=1-y}\, d\lambda_1(y) \\
&= \int_{[0,1]} \big(2(1-y)^3 + 2(1-y)y^2\big)\, d\lambda_1(y) \\
&= \big[-\frac{1}{2}(1-y)^4 + \frac{2}{3}y^3 - \frac{1}{2}y^4\big]_0^1 \\
&= 2/3 - 1/2 + 1/2 \;=\; 2/3\,.
\end{aligned}$$

Natürlich kann man mit etwas Erfahrung das fertige iterierte Integral auch sofort ohne die Zwischenschritte hinschreiben, z.B. bei der gerade gewählten Reihenfolge der Koordinaten:

$$\lambda_3(K) \;=\; \int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^{6x^2+2y^2} 1\; dz\; dx\; dy\,.$$

A 6 **(Satz von Fubini)** (3 Punkte)

Berechne das Integral $\int_A (2x+y)\, d\lambda_2(x,y)$, wobei

$$A \;:=\; \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \text{ und } x, y \geq 0\}\,.$$

Unter Benutzung des Satzes von Fubini erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_A (2x+y)\, d\lambda_2(x,y) &= \int_{[0,1]\times[0,1]} \chi_A\, (2x+y)\, d\lambda_2(x,y) \\
&= \int_{[0,1]} \int_{\left[0,\sqrt{1-y^2}\right]} (2x+y)\, d\lambda_1(x)\, d\lambda_1(y) \\
&= \int_{[0,1]} \big[x^2 + xy\big]_{x=0}^{x=\sqrt{1-y^2}}\, d\lambda_1(y) \\
&= \int_{[0,1]} \big((1-y^2) + y\sqrt{1-y^2}\,\big)\, d\lambda_1(y) \\
&= \big[y - \frac{y^3}{3} - \frac{1}{3}\,(1-y^2)^{\frac{3}{2}}\big]_0^1 \\
&= 1 - 1/3 + 1/3 \;=\; 1\,.
\end{aligned}$$