5. Übung zur Analysis IV, Lösungsvorschlag

Aufgaben

A 1 **(Beweise oder Widerlege)** (5 Punkte)
Sei $(M, \mathcal{S}, \mu)$ ein Maßraum und $f, g : M \to \mathbb{R}$ integrierbar. Entscheide, ob die untenstehenden Aussagen richtig oder falsch sind. Begründe Deine Antwort.

1. Ist $f(x) = g(x)$ für fast alle x, so ist $\int_M f\, d\mu = \int_M g\, d\mu$.
2. Ist $\int_M f\, d\mu = \int_M g\, d\mu$, so ist $g(x) = f(x)$ für alle x.
3. Ist $\int_M f\, d\mu = \int_M g\, d\mu$, so ist $g(x) = f(x)$ für fast alle x.
4. Ist $\int_M |f - g|\, d\mu = 0$, so ist $g(x) = f(x)$ für fast alle x.
5. Ist $\int_A f\, d\mu = \int_A g\, d\mu$ für alle $A \in \mathcal{S}$, so ist $g(x) = f(x)$ für fast alle x.

Hinweis: Die Begründungen sind unterschiedlich kompliziert.

1. Ist richtig. (Folgerung 2.8.)
2. Ist falsch. Gegenbeispiel : $M = [0, 2]$, $f = \chi_{[0,1]}$, $g = \chi_{(1,2]}$. *Dann ist* $\int_M f\, d\mu = 1 = \int_M g\, d\mu$ *aber* $g(x) \neq f(x)$ *für alle* x.
3. Ist auch falsch. Gleiches Beispiel.
4. Das ist richtig. Wir betrachten die Mengen

$$A_n = \left\{ x \mid |f(x) - g(x)| > \frac{1}{n} \right\}.$$

Dann gilt

$$0 = \int_M |f - g|\, d\mu \geq \int_M \chi_{A_n} |f - g|\, d\mu \geq \int_M \chi_{A_n} \frac{1}{n}\, d\mu = \frac{1}{n} \mu(A_n).$$

Daraus folgt $\mu(A_n) = 0$ *für alle* n. *Außerdem gilt* $A_{n+1} \supset A_n$. *Somit folgt aus Lemma 1.17 d.*

$$\mu(\{x \mid |f(x) - g(x)| \neq 0\}) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = 0.$$

5. Das ist richtig. Denn nach Satz 1.13 ist $f - g > 0$ *messbar, also* $A := \{f - g > 0\} \in \mathcal{S}$. *Also ist*

$$0 = \int_A (f - g) d\mu = \int_A |f - g| d\mu.$$

Nach 4. ist folglich $\mu(A) = 0$. *Analog für die Menge* $B := \{f - g < 0\}$.

A 2 **(Eine zappelige Funktion)** (5 Punkte)
Wir betrachten die Funktion

$$f : [\pi, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x} \sin x.$$

1. Begründe, dass f Borel messbar ist.
2. Zeige, dass
$$\lim_{R \to \infty} \int_\pi^R f(x) dx$$
endlich ist, wobei das Integral im Riemann'schen Sinn zu verstehen ist.
3. Zeige, dass f nicht Lebesgue integrierbar auf $[\pi, \infty)$ ist. Ist das Integral $\int_\pi^\infty f(x) d\lambda$ wohldefiniert im Sinne von Definition 2.4?

1. f *ist Borel messbar, da* f *stetig ist.*

2. *Wir integrieren partiell.*

$$\int_\pi^R f(x)dx = \left(-\cos x\frac{1}{x}\right)_\pi^R + \int_\pi^R \cos x\frac{-1}{x^2}dx.$$

Der erste Summand konvergiert für $R\to\infty$ gegen $-\frac{1}{\pi}$, und der zweite Summand ist ein Integral, für das der Grenzwert auch existiert, da $\frac{1}{x^2}$ in $[\pi,\infty)$ integrierbar ist und $|\cos x|$ beschränkt durch 1 ist.

3. *Wir betrachten f_+. Es gilt $\sin x \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ für $x\in[(2k)\pi+\frac{\pi}{4},(2k)\pi+\frac{3\pi}{4}]$. Sei $\chi_k = \frac{1}{\sqrt{2}}\chi_{[(2k)\pi+\frac{\pi}{4},(2k)\pi+\frac{3\pi}{4}]}$. Dann gilt $(\sin x)_+ \geq \sum_{k=1}^\infty \chi_k$. Also ist für jedes $m\in\mathbb{N}$ die Funktion*

$$T_m = \sum_{k=1}^m \frac{1}{(2k)\pi+\frac{3\pi}{4}}\chi_k \leq f_+$$

und eine Stufenfunktion. Es gilt

$$\int_\pi^\infty T_m\,d\lambda = \sum_{k=1}^m \frac{1}{(2k)\pi+\frac{3\pi}{4}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\pi}{2} \xrightarrow{m\to\infty} \infty.$$

Also kann das Integral über f_+ nicht endlich sein und f ist nicht Lebesgue integrierbar. Das Integral ist auch nicht wohldefiniert im Sinne von Definition 2.4, da man die gleiche Methode für f_- anwenden kann, also ist weder das Integral über f_+ noch das über f_- endich.

A 3 (fast überall)
Sei $(M,\mathcal{S},\mu)$ ein Maßraum. Für messbare Funktionen $f,g: M\to\mathbb{R}$ sagen wir $f\sim g$, falls $f=g$ fast überall. Beweise, dass „$\sim$" eine Äquivalenzrelation ist.

$f(x)=f(x)$ für alle x und alle messbaren f. Also ist $f\sim f$.
Sei $f=g$ fast überall. Dann ist auch $g=f$ fast überall.
Sei $f\sim g$ und $g\sim h$. Dann ist $f(x)=g(x)$ für alle $x\notin N_1$ und $g(x)=h(x)$ für alle $x\notin N_2$ für zwei Nullmengen N_1 und N_2. Somit ist $f(x)=g(x)$ für alle $x\notin N_1\cup N_2$, was nach Additivität von μ wieder eine Nullmenge ist.

A 4 (Die Räume $L^p(d\mu)$) (7 Punkte)
Sei $(M,\mathcal{S},\mu)$ ein Maßraum. Für $p\in[1,\infty)$ definieren wir den Raum

$$L^p(d\mu) = \left\{f: M\to\mathbb{R}\,\middle|\, f \text{ messbar und } \|f\|_{p,\mu} := \left(\int_M |f(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} < \infty\right\}.$$

1. Entscheide, welche Eigenschaften der Norm von $\|\cdot\|_{p,\mu}$ erfüllt und welche verletzt werden.
Hinweis: Für $p\in(1,\infty)$ gilt die Hölder'sche Ungleichung

$$\left|\int_M fg\,d\mu\right| \leq \|f\|_{p,\mu}\|g\|_{q,\mu}$$

für alle messbaren $f,g: M\to\mathbb{R}$, mit $\|f\|_{p,\mu}<\infty$ und $\|g\|_{q,\mu}<\infty$, wobei $q\in(1,\infty)$ mit $\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=1$.

2. Beweise die Höldersche Ungleichung.
Anleitung:
    - Verwende die Bernoulli'sche Ungleichung: $(1+\eta)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{\eta}{p} + 1$ für alle $\eta \geq 0$.
    - Beweise, dass für alle $\alpha, \beta > 0$ gilt
    $$\alpha^{\frac{1}{p}}\beta^{\frac{1}{q}} \leq \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{q}.$$
    - Setze speziell
    $$\alpha := \left(\frac{f(x)}{\|f\|_{p,\mu}}\right)^p \quad \text{und} \quad \beta := \left(\frac{g(x)}{\|g\|_{q,\mu}}\right)^q$$
    und folgere hieraus die Behauptung.

1. *Offensichtlich ist* $\|\lambda f\|_{p,\mu} = \left(\int_M |\lambda f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda|\|f\|_{p,\mu}$. *Zum Beweis der Dreiecksungleichung (auch Minkowski Ungleichung) benötigt man die Höldersche Ungleichung (vergleiche Aufgabe 44). In den Fällen* $p = 1$ *und* $p = \infty$ *ist die Ungleichung klar (*$p = \infty$ *bedeutet* $\|\cdot\|$ *ist die Maximumsnorm). Sei also* $1 < p < \infty$ *und* $q := (1 - 1/p)^{-1}$ *(und damit* $q(p-1) = p$*). Dann ist*
$$\begin{aligned} \|f+g\|_{p,\mu}^p &= \int_M |f+g|^p d\mu \\ &\leq \int_M |f||f+g|^{p-1} d\mu + \int_M |g||f+g|^{p-1} d\mu \\ &\leq^{Hoelder} \|f\|_p \left(\int_M |f+g|^{(p-1)q} d\mu\right)^{\frac{1}{q}} + \|g\|_p \left(\int_M |f+g|^{(p-1)q} d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= (\|f\|_{p,\mu} + \|g\|_p)\|f+g\|_{p,\mu}^{\frac{p}{q}}. \end{aligned}$$
Teilt man das ganze durch $\|f+g\|_{p,\mu}^{\frac{p}{q}}$, *so erhält man wegen* $p - \frac{p}{q} = p(1-\frac{1}{q}) = 1$ *die Ungleichung* $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.
Die Eigenschaft $\|f\|_{p,\mu} = 0 \;\Rightarrow\; f = 0$ *ist nicht erfüllt. Beispiel:* $f(0) = 1$ *und* $f(x) = 0$ *für alle* $x \neq 0$. *(Man könnte auch* $f(x) = \chi_N$ *für eine beliebige Nullmenge* N *nehmen.)*
2. *OBdA können wir annehmen, dass* $f \geq 0$, $g \geq 0$ *und* $\sigma := \|f\|_{p,\mu} \neq 0 \neq \|g\|_{q,\mu} =: \tau$. *Aus der Bernoulli'schen Ungleichung folgt sofort die Ungleichung*
$$\xi^{\frac{1}{p}} \leq \frac{\xi}{p} + \frac{1}{q} \quad \text{für alle } \xi \geq 1.$$
Sind nun $\alpha, \beta > 0$, *so gilt entweder* $\alpha\beta^{-1} \geq 1$ *oder* $\alpha^{-1}\beta \geq 1$. *ObdA sei* $\xi := \alpha\beta^{-1} \geq 1$. *(Sonst vertausche man einfach die Rollen von* p *und* q*.) Dann gilt*
$$\alpha^{\frac{1}{p}}\beta^{\frac{1}{q}} \leq \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{q}.$$
Weil diese Ungleichung für alle $\alpha, \beta \geq 0$ *gilt, können wir*
$$\alpha := \left(\frac{f(x)}{\sigma}\right)^p \quad \text{und} \quad \beta := \left(\frac{g(x)}{\tau}\right)^q$$
setzen. Somit folgt
$$\frac{1}{\sigma\tau} fg \leq \frac{1}{\sigma^p p} f^p + \frac{1}{\tau^q q} g^q.$$
Integriert man über diese Ungleichung, so erhält man
$$\int_M fg\, d\mu \leq \sigma\tau \left(\frac{1}{\sigma^p p}\int_M f^p d\mu + \frac{1}{\tau^q q}\int_M g^q d\mu\right) = \sigma\tau(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}) = \sigma\tau.$$
Das ist die Höldersche Ungleichung.

A 5 **(Zerlegung in disjunkte Mengen)** (4 Punkte)
Man betrachte einen Maßraum $(M, \mathcal{S}, \mu)$. Sei $(A_n) \subset \mathcal{S}$ eine Folge von disjunkten Mengen, deren Vereinigung M ist. Sei $f : M \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Beweise, dass f genau dann integrierbar ist, wenn $f : A_n \to \mathbb{R}$ für jedes A_n messbar ist und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} |f| d\mu$ konvergiert.

Sei zunächst f integrierbar und $T : A_n \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion mit $T(x) \leq |f(x)|$ für alle $x \in A_n$. Setzt man T außerhalb von A_n durch 0 fort, so ist T immer noch eine Treppenfunktion und es gilt $T \leq |f|$, und da A_n messbar ist, ist auch das fortgesetzte T messbar. Somit ist

$$\int_M T\, d\mu \leq \int_M f\, d\mu.$$

Also ist das Integral über Treppenfunktionen, die unter f in A_n liegen beschränkt, also ist f integrierbar in A_n. Außerdem gilt $\chi_{\bigcup_{k\leq m} A_k} |f| \leq |f|$ für alle m und es gilt nach der Additivität des Integrals

$$\sum_{k=1}^{m} \int_{A_k} |f|\, d\mu = \int_M \chi_{\bigcup_{k\leq m} A_k} |f|\, d\mu \leq \int_M |f|\, d\mu < \infty.$$

Also konvergiert die Reihe.

Sei umgekehrt f in A_n integrierbar und die Reihe konvergent. Sei $(T_{n,k})_k$ eine monoton wachsende Folge von Stufenfunktionen, die gegen f punktweise in A_n konvergiert. Setzen wir jedes $T_{n,k}$ durch 0 auf ganz M fort, so erhalten wir wieder eine Stufenfunktion.

Ausserdem ist

$$T_k := \sum_{j=1}^{k} T_{j,k} \leq f$$

wieder eine Stufenfunktion, die monoton und punktweise in M gegen f konvergiert. Also ist nach Folgerung 2.3 die Funktion f messbar.

Sei jetzt χ_B, $B \subset M$ eine Elementarfunktion. Dann ist $\chi_B \chi_{A_n}$ für jedes n auch wieder eine Elementarfunktion und es gilt

$$\int \chi_B d\mu = \mu(B) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k \cap B) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} \chi_B d\mu.$$

Aus der Linearität des Integrals folgt für Treppenfunktionen $T \leq |f|$

$$\int_M T\, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} T\, d\mu \leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} |f|\, d\mu < K < \infty.$$

Dabei wurde verwendet, dass $\chi_{A_k} |T(x)| < f(x)$ für alle $x \in A_k$. Somit ist das Supremum des Integrals über Treppenfunktionen unter $|f|$ beschränkt, das heißt das Integral über $|f|$ und somit auch über f existiert.