4. Übung zur Analysis IV, Lösungsvorschlag

Aufgaben

A 1 (1 Punkt)

Beweise, dass $f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}$ Lebesgue-integrierbar auf $[0,1]$ ist und bestimme das Lebesgue'sche Integral $\int_{[0,1]} f(x) d\lambda(x)$.

Da die Menge $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ messbar ist, ist f eine nichtnegative Stufenfunktion. Aus $\lambda([0,1]) < \infty$ folgt, dass sie Lebesgue-integrierbar ist. Es gilt nach Definition vom Lebesgue-Integral $\int_{[0,1]} f d\lambda = I_{[0,1]}(f) = 1 \cdot \lambda(\mathbb{Q} \cap [0,1]) + 0 \cdot \lambda([0,1] \setminus \mathbb{Q}) = 0$.

A 2 (3 Punkte)

Finde eine Folge von Lebesgue-integrierbaren Funktionen $f_n : [0,1] \to [0,\infty)$, die gleichzeitig die folgenden Eigenschaften haben:

1. Für alle $x \in [0,1]$ gilt $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$,
2. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\int_0^1 f_n(x) d\lambda = 1$.

Sei $f_n(x) = \begin{cases} n \cdot \chi_{[0,\frac{1}{n}]}(x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

Dann ist $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ für alle $x \in [0,1]$ und $\int_0^1 f_n(x)dx = 1$.

A 3 (4 Punkte)

Sei $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{L}^1(X,\mu)$ eine Folge von Funktionen, die gleichmässig gegen eine Funktion f konvergiert. Zeige, dass wenn $\mu(X) < \infty$ ist, dann ist $\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0$. Gilt dies auch noch, wenn $\mu(X) = \infty$ ist?

Sei $\mu(X) < \infty$. Da f_n gleichmässig gegen f konvergiert, kann für jeden ε ein N gewählt werden, so dass für alle $n > N$ und $x \in X$ $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ ist. Aus Satz 2.10 folgt, dass für $n > N$ jede von Funktionen $|f_n - f|$ Lebesgue-integrierbar ist. Aus Lemma 2.5(c) können wir auch schließen, dass für $n > N$ $\int_X |f_n(x) - f(x)| d\mu < \mu(X)\varepsilon$ gilt, woraus $\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0$ folgt.

Für $\mu(X) = \infty$ ist die Aussage falsch. Als Gegenbeispiel können wir die Funktionenfolge $f_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{[-n^2,n^2]}(x)$ auf $X = \mathbb{R}$ betrachten. Diese Folge konvergiert gleichmässig gegen 0 auf $\mathbb{R}$. (Das folgt aus $\max_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n} \to 0$). Aber $\int_{\mathbb{R}} f_n(x) d\lambda = 2n \to \infty$.

A 4 (4 Punkte)

Entscheide, ob die folgenden Funktionen $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar sind und bestimme gegebenenfalls das Lebesgue'sche Integral $\int_E f(x) d\lambda(x)$.

1. (2 Punkte) $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \chi_{[1-\frac{1}{2^k}, 1-\frac{1}{2^{k+1}})}$, $E = [0,1)$,
2. (2 Punkte) $f(x) = [\frac{1}{x}]$, $E = (0,1]$, wobei $[a]$ die größte ganze Zahl bezeichnet, die nicht größer als a ist.

1. *Die Funktionen $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \chi_{[1-\frac{1}{2^k}, 1-\frac{1}{2^{k+1}})}$ auf E sind Stufenfunktionen. Da $\mu(E) < \infty$ ist, sind sie auch Lebesgue-integrierbar und $\int_E f_n(x) d\lambda = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} (\frac{1}{4})^k$. Die folge f_n konvergiert gleichmässig gegen f, weil $\max_{x\in[0,1)} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{2^{n+1}} \to 0$. Aus A3 und $f(x) > f_n(x)$ folgt, dass $\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x) d\lambda = \int_E f(x) d\lambda$ ist. Daher ist $\int_E f(x) d\lambda = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{1}{4})^k = \frac{2}{3}$.*
2. *Die Funktionen $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \chi_{(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}]}$ sind Stufenfunktionen mit $f_n(x) \leq f(x)$. Da $I_E(f_n) = \sum_{k=1}^{n} k(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}$ ist, gilt $\lim_{n\to\infty} I_E(f_n) = \infty$. Daher ist $\int_E f d\lambda = \infty$, was bedeutet, dass f nicht Lebesgue-integrierbar ist.*

A 5 (5 Punkte)

Beweise den Satz 1.26 aus dem Skript.

Es wurde schon gezeigt, dass die Definition von $\tilde{\mu}$ korrekt ist. Man muss jetzt zeigen, dass

(1) $\tilde{\mathfrak{S}}$ eine σ-Algebra ist (4 Punkte).

(2) $\tilde{\mu}$ ein Mass auf $(X, \tilde{\mathfrak{S}})$ ist (1 Punkt).

1. *Zunächst haben wir $\emptyset \in \tilde{\mathfrak{S}}$.*
   Ist $A \in \tilde{\mathfrak{S}}$, dann existiert $\hat{A} \in \mathfrak{S}$ und eine μ-Nullmenge $\hat{N}$, so dass $A = \hat{A} \cup \hat{N}$. Nach Definition von Nullmengen gibt es eine Menge $N \in \mathfrak{S}$, die die Menge $\hat{N}$ enthält und $\mu(N) = 0$. $X \setminus A = X \setminus (\hat{A} \cup \hat{N}) = X \setminus (\hat{A} \cup N) \cup (\hat{A} \cup N) \setminus (\hat{A} \cup \hat{N}) = (X \setminus (\hat{A} \cup N)) \cup (N \setminus (\hat{A} \cup \hat{N}))$. Die Menge $X \setminus (\hat{A} \cup N)$ gehört zu σ-Algebra $\mathfrak{S}$, und $N \setminus (\hat{A} \cup \hat{N}) \subset N$ ist eine μ-Nullmenge. Daraus folgt, dass $X \setminus A \in \tilde{\mathfrak{S}}$.
   Ist schließlich $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Mengen aus $\tilde{\mathfrak{S}}$, so gibt es Mengen $\hat{A}_n \in \mathfrak{S}$ und Nullmengen $\hat{N}_n$ mit $A_n = \hat{A}_n \cup \hat{N}_n$. Nach Definition von Nullmengen gibt es zur jeden $\hat{N}_n$ eine Menge $N_n \in \mathfrak{S}$, die die Menge $\hat{N}_n$ enthält und $\mu(N_n) = 0$. Aus $\cup_{n=1}^{\infty} \hat{N}_n \subset \cup_{n=1}^{\infty} N_n$ und Lemma 1.17 (e) und σ-Additivität vom Mass μ folgt, dass die Menge $\cup_{n=1}^{\infty} \hat{N}_n$ eine μ-Nullmenge ist. Dann gehört $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = \cup_{n=1}^{\infty} \hat{A}_n \bigcup \cup_{n=1}^{\infty} \hat{N}_n$ zur $\tilde{\mathfrak{S}}$.
2. *Da $\emptyset = \emptyset \cup \emptyset$ ist, haben wir $\tilde{\mu}(\emptyset) = 0$. Seien $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \tilde{\mathfrak{S}}$ paarweise disjunkte Mengen. Dann finden sich die Mengen $\hat{A}_n \in \mathfrak{S}$ und Nullmengen $\hat{N}_n$ mit $A_n = \hat{A}_n \cup \hat{N}_n$. Da $\hat{A}_n \cap \hat{A}_m \subset A_n \cap A_m = \emptyset$, $n \neq m$, gilt*

$$\tilde{\mu}(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \mu(\cup_{n=1}^{\infty} \hat{A}_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\hat{A}_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\mu}(A_n).$$

   Also ist $\tilde{\mu}$ ein Mass.

A 6 (4 Punkte)

Sei $(X, \mathfrak{S}, \mu)$ ein Massraum, $f : (X, \mathfrak{S}) \to \bar{\mathbb{R}}$ Lebesgue-integrierbar und $c > 0$.

1. Zeige die sogenannte Tschebychevsche Ungleichung:

$$\mu(\{x \in X : |f(x)| \geq c\}) \leq \frac{1}{c} \int_X |f| d\mu.$$

2. Zeige: $\int_X |f| d\mu = 0 \Rightarrow f = 0$ fast überall.

1. *Sei $A = \{x \in X : |f(x)| \geq c\}$ und $g(x) = c \cdot \chi_A$. Da $g(x) \leq |f(x)|$ ist, gilt $c\mu(A) \leq \int_X |f(x)| d\mu$, was die nötige Ungleichung ergibt.*
2. *Sei $A_n = \{x \in X : |f(x)| \geq \frac{1}{n}\}$. Die Menge $\{x \in X : f(x) \neq 0\} = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$. Aus Tschebycheb-schen Ungleichung folgt, dass*

$$0 \leq \mu(A_n) \leq n \int_X |f(x)| d\mu = 0,$$

   was $\mu(A_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ergibt. Aus Lemma 1.17(e) folgt $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = 0$.