3. Übung zur Analysis IV, Lösungsvorschlag

Aufgaben

A 1 **(Das Lebesgemaß von speziellen Mengen)** (4 Punkte)

1. Bestimme das n-dimensionale Lebesguemaß der folgenden Mengen

$$(i)\ A_1 = \emptyset \quad (ii)\ A_2 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_\infty \in (1,2)\}.$$

2. Beweise, dass $\mathbb{Q}$ und $[0,1]\backslash\mathbb{Q}$ Borelmengen sind. Bestimme das Lebesguemaß von $\mathbb{Q}$ und $[0,1]\backslash\mathbb{Q}$.

1. (i) $\lambda(A_1) = 0$ nach Definition des Maßes.
(ii) $\lambda(A_2) = \lambda\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_\infty < 2\} - \lambda\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_\infty < 1\} = 4^n - 2^n$.

2. Einelemenige Mengen sind Borelmengen und $\mathbb{Q}$ ist die abzählbare Vereinigung von einelementigen Mengen und damit eine Borelmenge. Somit ist auch $[0,1] \setminus \mathbb{Q} = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1]$ eine Borelmenge. Sei $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Abzählung von $\mathbb{Q}$. Dann ist für alle $\varepsilon > 0$

$$\lambda(\{q_n\}) \leq \lambda([q_n - \varepsilon, q_n + \varepsilon)) = 2\varepsilon$$

also $\lambda(q_n) = 0$. Aus der σ-Additivität des Lebesguemaßes folgt $\lambda(\mathbb{Q}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda\{q_n\} = 0$. Weiterhin gilt $1 = \lambda(([0,1] \setminus \mathbb{Q}) \cup ([0,1] \cap \mathbb{Q})) = \lambda([0,1] \setminus \mathbb{Q}) + \lambda([0,1] \cap \mathbb{Q}) = \lambda([0,1] \setminus \mathbb{Q})$.

A 2 **(Binomialverteilung)** (2 Punkte)
Sei $M = \{0, 1, ..., n\}$ und $0 < p < 1$. Für $k \in M$ sei

$$P_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Beweise, dass es genau ein Maß μ auf $(M, \mathcal{P}(M))$ gibt mit $\mu(\{k\}) = P_k$. Bestimme $\mu(M)$.

Für $A \subset M$ setzen wir $\mu(A) = \sum_{k\in A} P_k$. Dann gilt natürlich $\mu(\emptyset) = 0$. Da man in der endlichen Menge M nur endlich viele nichtleere Teilmengen vereinigen kann, genügt es zu zeigen, dass $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ für alle $A, B \subset M$ disjunkt. Das folgt aber sofort aus der Definition von μ.
Die Eindeutigkeit folgt aus $\mu(A) = \sum_{k\in A} \mu\{k\} = \sum_{k\in A} P_k$.
Außerdem gilt $\mu(M) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p + (1-p))^n = 1$.

A 3 **(Dichte, offene Mengen von kleinem Maß).** (3 Punkte)

(a) Da $\mathbb{Q}$ eine abzählbare unendliche Menge ist, gibt es eine Bijektion $q\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $n \mapsto q_n$. Zeige, dass

$$\mathbb{R} \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (q_n - 2^{-n},\ q_n + 2^{-n}) \ \neq\ \emptyset\,.$$

(b) Finde zu $\varepsilon > 0$ eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}$ vom Maß $\lambda(U) \leq \varepsilon$ derart, dass U in $\mathbb{R}$ dicht ist (also $U \cap V \neq \emptyset$ für jede nicht-leere offene Teilmenge $V \subseteq \mathbb{R}$).

(a) Wir haben zu zeigen, dass $U := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (q_n - 2^{-n},\ q_n + 2^{-n})$ eine echte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist. Da $\lambda(\mathbb{R}) = \lim_{n\to\infty} \lambda([-n, n[) = \infty$, brauchen wir hierzu nur $\lambda(U) < \infty$ nachzuweisen. Nach Lemma 1.17 (e) ist tatsächlich

$$\lambda(U) \ \leq\ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda\big(q_n - 2^{-n},\ q_n + 2^{-n}\big) \ =\ \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot 2^{-n} \ =\ 2 \ <\ \infty\,.$$

(b) Gegeben $\varepsilon > 0$ setzen wir $U := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (q_n - \frac{\varepsilon}{2} \cdot 2^{-n},\ q_n + \frac{\varepsilon}{2} \cdot 2^{-n})$. Dann ist U offen als Vereinigung offener Mengen. Da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ ist und $\mathbb{Q} \subseteq U$, ist weiter U dicht in $\mathbb{R}$. Schließlich zeigt die gleiche Rechnung wie in (a), dass $\lambda(U) \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2\, \frac{\varepsilon}{2}\, 2^{-n} = \varepsilon$.

A 4 **(Translationsinvarianz des Lebesguemaßes)** (5 Punkte)
Für eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ und $a \in \mathbb{R}^n$ definieren wir die verschobene Menge $a + A := \{a + x \mid x \in A\}$.

1. Sei λ das Lebesguemaß in $\mathbb{R}^n$. Zeige, dass λ translationsinvariant ist, das heißt
$$\lambda(a + A) = \lambda(A).$$
Hinweis: Zeige, dass $\mu(A) := \lambda(a + A)$ auch ein Maß ist. Verwende den Eindeutigkeitssatz für das Lebesguemaß.
2. Sei μ ein translationsinvariantes Maß in $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Beweise, dass $\mu = c\lambda$, wobei $c \geq 0$ und λ das Lebesguemaß ist.
Hinweise:
   - $c = \mu([0, 1))$,
   - $[0, 1) = \bigcup_{k=1}^n [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n})$.
   - $\mu([0, \frac{p}{q})) =?$.
   - Für $a < b \in \mathbb{R}$ approximiere $b - a$ durch eine fallende Folge rationaler Zahlen. $\mu([a, b)) =?$.

1. *Wegen $a + \emptyset = \emptyset$ gilt $\mu(\emptyset) = 0$. Seien $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}$ disjunkt. Dann ist auch $(A_k + a)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}$ disjunkt. (Die stetige Abbildung $x \mapsto a + x$ und ihre Inverse ist meßbar.)*
Also gilt
$$\mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) = \lambda\left(a + \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) = \lambda\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} (a + A_k)\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda(a + A_k) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(a_k).$$
Somit ist μ ein Borelmaß.
Weiterhin gilt für reelle Zahlen $c < b$
$$\mu([c, b]) = \lambda([c + a, b + a]) = b + a - (c + a) = b - c.$$
Also nimmt μ auf Intervallen das kanonische Volumen an. Nach dem Eindeutigkeitssatz für das Lebesguemaß folgt $\mu = \lambda$ oder $\lambda(A + a) = \lambda(A)$ für alle Borelmengen A.
2. *Es gilt wegen der Translationsinvarianz von μ*
$$c = \mu([0, 1)) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^n [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n})\right) = \sum_{k=1}^n \mu([\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n})) = \sum_{k=1}^n \mu([0, \frac{1}{n})) = n\mu([0, \frac{1}{n})),$$
also $\mu([0, \frac{1}{n})) = \frac{c}{n}$. Analog zeigt man für $p, q \in \mathbb{N}$
$$\mu([0, \frac{p}{q})) = c\frac{p}{q}.$$
Für $x > 0$ reell findet man eine Folge (x_n) aus rationalen Zahlen die monoton fallend gegen x konvergiert. Aus Lemma 1.17 (d) folgt nun
$$\mu(0, x) = \lim_{n\to\infty} \mu([0, x_n)) = \lim_{n\to\infty} cx_n = cx.$$
Also folgt für beliebige reelle Zahlen $a < b$
$$\mu([a, b)) = \mu([0, b - a)) = c(b - a).$$
Also ist $\frac{1}{c}\mu$ ein Borelmaß, das Intervallen ihre Länge zuordnet. Das heißt $\frac{1}{c}\mu = \lambda$ ist das Lebesguemaß.

A 5 (Verteilungsfunktion) (3 Punkte)
Sei μ ein Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, so dass $\mu(a, b) < \infty$, falls $a < b$ reell sind. Weiter sei

$$F(x) := \begin{cases} \mu(0, x], & \text{falls } x > 0 \\ -\mu(x, 0], & \text{falls } x < 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Zeige, dass F genau dann stetig in x ist, wenn $\mu(x) = 0$ ist.

Für reelle Zahlen $a < b$ gilt

$$\mu((a, b]) = F(b) - F(a).$$

Um dies zu sehen, muss man die Fälle $a < b < 0$, $a < 0 \leq b$ und $0 \leq a < b$ unterscheiden. Hier behandeln wir nur den Fall $a < 0 \leq b$ exemplarisch. Es gilt

$$\mu((a, b]) = \mu((0, b] \cup (a, 0]) = \mu((0, b]) + \mu((a, 0]) = F(b) - F(a).$$

Seien (a_n) und (b_n) Folgen, die gegen x konvergieren, wobei (a_n) streng monoton wächst und (b_n) streng monoton fällt. Es gilt nach Lemma 1.17 (d)

$$\mu(\{x\}) \xleftarrow{n \to \infty} \mu((a_n, b_n]) = F(b_n) - F(a_n)$$

Ist $\mu(\{x\}) > 0$, dann stimmen in x linksseitiger und rechtsseitiger Grenzwert nicht überein und F kann in x nicht stetig sein.

Wenn $\mu(\{x\}) = 0$ ist, so gilt wegen der Monotonie von F

$$F(b_n) \leq F(x) \leq F(a_n)$$

Also konvergieren sowohl $F(b_n)$ als auch $F(a_n)$ gegen $F(x)$.