1. Übung zur Analysis IV, Lösungsvorschlag

Aufgaben

A 1 Entscheide, ob die folgenden Teilmengen von $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ auch σ-Algebren sind. Begründe jeweils Deine Antwort.

1. $\mathcal{S} = \{A \subset \mathbb{R} \mid A \text{ endlich oder } \mathbb{R} \setminus A \text{ endlich}\}$
2. $\mathcal{S} = \{A \subset \mathbb{R} \mid A \text{ abzählbar oder } \mathbb{R} \setminus A \text{ abzählbar}\}$
3. $\mathcal{S} = \{(a,b), [a,b], (a,b], [a,b) \mid a \leq b\}$

1. *Das ist keine σ-Algebra denn $A_i = \{i\}$ ist endlich für alle $i \in \mathbb{N}$, also $A_i \in \mathcal{S}$ aber $\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{i\} = \mathbb{N} \notin \mathcal{S}$, da weder $\mathbb{N}$ noch $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ endlich ist.*
2. *Das ist eine σ-Algebra.*
   (a) *$\emptyset$ ist abzählbar, also $\emptyset \in \mathcal{S}$.*
   (b) *Sei $A \in \mathcal{S}$. 1. Fall: A ist abzählbar. Dann ist $\mathbb{R} \setminus (\mathbb{R} \setminus A) = A$ abzählbar, also $\mathbb{R} \setminus A \in \mathcal{S}$. 2. Fall: $\mathbb{R} \setminus A$ ist abzählbar. Dann gilt $\mathbb{R} \setminus A \in \mathcal{S}$ natürlich auch.*
   (c) *Sei $(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$. 1. Fall: Alle A_i sind abzählbar. Dann ist $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ abzählbar. 2. Fall: Es gibt ein k, so dass A_k überabzählbar ist. Dann gilt wegen $A_i \in \mathcal{S}$ dass $\mathbb{R} \setminus A_k$ abzählbar ist. Es folgt, dass*
   $$\mathbb{R} \setminus \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \subset \mathbb{R} \setminus A_k$$
   abzählbar ist.
3. *Das ist keine σ-Algebra, da $(1,2) \cup (3,4)$ kein Intervall ist.*

A 2 Sei $(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ eine abzählbare Familie mit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathbb{R}$ und $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$. Zeige: dann ist

$$\mathcal{S} := \left\{ \bigcup_{i\in I} A_i \mid I \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \right\}$$

eine σ-Algebra in $\mathbb{R}$.

1. *$\emptyset \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \Rightarrow \emptyset \in \mathcal{S}$.*
2. *$A \in \mathcal{S} \Rightarrow$ Es gibt $I \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ mit $A = \bigcup_{i\in I} A_i$. Aus den Voraussetzungen an die Familie $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ folgt $\mathbb{R} \setminus A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}\setminus I} A_i \in \mathcal{S}$.*
3. *Seien $A_k = \bigcup_{i\in I_k} A_i \in \mathcal{S}$, $k \in \mathbb{N}$. Dann ist*
$$\bigcup A_k = \bigcup_{i\in\bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k} A_i \in \mathcal{S}.$$

A 3 Seien $X = \{1,2,3,4\}$ und $\mathcal{A} = \{\{1,2\},\{2,3,4\}\}$. Weiter sei $\mathcal{S}$ die kleinste σ-Algebra in X, die $\mathcal{A}$ enthält.

1. Bestimme $\mathcal{S}$. Ist $\mathcal{S} = \mathcal{P}(X)$?
2. Entscheide, ob die Funktion $f : (X, \mathcal{S}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ messbar ist, wobei
$$(i)\ f(x) = (x-3)^2, \quad (ii)\ f(x) = \left| x - \frac{7}{2} \right|.$$

1. *$\mathcal{S} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3,4\}, \{1,2\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, X\}$*

A 4 (7 Punkte)
Sei $X = (0,1)$ und $\mathcal{A} = \{(0, \frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$. Sei $\mathcal{S}$ die kleinste σ-Algebra, die $\mathcal{A}$ enthält.

1. Gehört $\left[\frac{1}{150}, \frac{1}{7}\right)$ zu $\mathcal{S}$?

2. Bestimme $\mathcal{S}$.
3. Entscheide, ob die Funktion $f : (X, \mathcal{S}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit $f(x) = \frac{1}{x}$ messbar ist.
4. Bestimme alle messbaren Funktionen $f : (X, \mathcal{S}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

1. Ja. $[\frac{1}{150}, \frac{1}{7}) = (X \setminus (0, \frac{1}{150})) \cap (0, \frac{1}{7})$.

2. Sei $A_n = [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$ *mit* $n \in \mathbb{N}$. *Dann ist* $A_n \in \mathcal{S}$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$. *Damit ist* $\bigcup_{n\in I} A_n \in \mathcal{S}$ *für alle* $I \subset \mathbb{N}$. *Aus A2 folgt, dass* $\{\bigcup_{i\in I} A_i \mid I \subset \mathbb{N}\}$ *eine* σ*-Algebra ist. Somit folgt*

$$\mathcal{S} = \left\{ \bigcup_{i\in I} A_i \mid I \subset \mathbb{N} \right\}.$$

A 5 (4 Punkte)
Entscheide, ob die Funktion $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ messbar ist, wobei

$$(i)\ f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad (ii)\ f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{wenn } x = \frac{p}{q},\ \ q > 0,\ \ p, q \text{ teilerfremd} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

A 6 (6 Punkte)
Beweise Lemma 1.3.
Ist denn auch die Vereinigung $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ zweier σ-Algebren $\mathcal{S}_1$ und $\mathcal{S}_2$ wieder eine σ-Algebra?

1. Sei $\mathcal{M} := \bigcap \mathcal{A}$.

1. $\emptyset \in \mathcal{M}$, *da* $\emptyset \in \mathcal{A}$ *für alle* $\mathcal{A}$.
2. *Sei* $A \in \mathcal{M}$. *Dann ist* $A \in \mathcal{A}$ *für alle* $\mathcal{A}$. *Also ist auch* $X \setminus A \in \mathcal{A}$ *für alle* $\mathcal{A}$.
3. *Sei* $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$. *Dann ist* $A_n \in \mathcal{A}$ *für alle* $\mathcal{A}$ *und* $n \in \mathbb{N}$. *Damit ergibt sich* $\bigcup A_k \in \mathcal{A}$ *für alle* $\mathcal{A}$, *das heißt* $\bigcup A_k \in \mathcal{M}$.

2.

1. $\emptyset \in \mathcal{S}_Y$, *da* $\emptyset = \emptyset \cap Y$ *ist.*
2. *Sei* $A \in \mathcal{S}_Y$. *Dann ist* $A = E \cap Y$ *für ein* $E \in \mathcal{S}$. *Damit erhalten wir* $Y \setminus A = Y \cap (X \setminus E) \in \mathcal{S}_Y$.
3. *Seien* $A_1, A_2, A_3, ... \in \mathcal{S}_Y$. *Dann ist* $A_n = E_n \cap Y$ *für geeignete* $E_n \in \mathcal{S}$. *Dann ist*

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} (E_n \cap Y) = Y \cap \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n \in \mathcal{S}_Y.$$

Die Antwort auf die letzte Frage lautet nein. Gegenbeispiel $X = \{1, 2, 3\}$

$$\mathcal{S}_1 = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, X\}, \quad \mathcal{S}_1 = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3\}, X\}.$$

Dann ist $\{1\}, \{3\} \in \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$, *aber* $\{1, 3\} \notin \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$.