Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. S. Roch
Nataliya Kraynyukova
Katrin Schumacher

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

18. Juli 2007

13. Übung zur Analysis IV

Aufgaben

A 1 (Eine Wiederholung)
Entscheide, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Sei streng mit Dir und entscheide erst, wenn Du Deine Antwort auch begründen kannst.

(a) Sind $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrierbar, so auch $f \cdot g$.

(b) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ messbar, so ist f fast überall stetig.

(c) Ist $f : \times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lipschitz stetig, so ist die Lösung u von $u'(t) = f(t, u(t))$ eindeutig.

(d) Konvergiert eine monoton wachsende Folge von integrierbaren Funktionen fast überall punktweise gegen eine integrierbare Grenzfunktion, so konvergiert diese Folge auch in L^1.

(e) $\{A \subset \mathbb{R} \mid A = A \cap \mathbb{Z}\}$ ist eine σ-Algebra.

(f) Ist $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und beschränkt, so ist f konstant.

(g) Konvergiert eine Folge (f_n) integrierbarer Funktionen punktweise gegen eine Grenzfunktion f und existiert eine integrierbare Funktion g, so dass gilt $f_n(x) \leq g(x)$ für fast alle x, so ist f integrierbar.

(h) Die integrierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bilden einen Vektorraum.

(i) Ist $f(x, y) \geq 0$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und f messbar, so gilt

$$\int_{\mathbb{R}^2} f \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x, y) \, dy \, dx.$$

A 2 (σ-Algebren)
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Homöomorphismus. Zeige, dass

$$\mathcal{S} := \{f(A) \mid A \in \mathcal{B}\} = \mathcal{B}$$

ist. Dabei ist $\mathcal{B}$ die Borel'sche σ-Algebra.

A 3 (Integration auf Untermannigfaltigkeiten)
Wir betrachten die Menge

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = x^2 + y^2, \ 0 < x^2 + y^2 < 1\}$$

und die Funktion $f : M \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) := \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}$. Berechne das Integral $\int_M f \, dS_M$ auf folgende Weisen:

(i) Fasse M als Rotationskörper auf, der durch Rotation der Kurve $z = x^2$, $0 < x < 1$, um die z-Achse entsteht.

(ii) Fasse M als Graphen einer Funktion auf dem offenen Einheitskreis auf.